

研究ノート

## 極大化の二階の条件と 模索運動の局所安定条件の同値性について

松 尾 匡

はじめに

極大化の二階の条件と、目的関数を増やす方向に制御変数を動かす模索運動の局所安定条件が同値であることの証明は、誰でも思いつく問題だと思うので、すでになされているはずと思うのだが目にすることがない。筆者は元来不勉強だからそれも当然だが、優秀な周囲に何人も尋ねても知らないと言われる。

運動方程式に調整係数がないならば証明は簡単である。目的関数の偏導関数が各制御変数の時間微分になるので、それを線形近似したヤコビアンは、極大化問題のヘッシアンと同じである。よってヘッシアンが二階の条件を満たして負値定符号ならば、その固有値はすべて負となり、運動は安定になる。逆は逆。

しかし、各制御変数の時間微分が、目的関数の偏導関数に調整係数がかかったものになっていると、証明はそれほど簡単ではない。偏導関数のヤコビアンが、ヘッシアンに調整係数行列が左乗されたものになり、対称行列ではなくなるので、ヘッシアンが負値定符号でも、この行列全体の固有値の負値性は一見ただけでは言えない。

筆者は大学院の講義のためにこの同値性を証明したのでここに記す。先行研究があるに違いないと思うので「研究ノート」として発表するが、同様の必要性に迫られる人はいるものと思われるので社会的意義はあるものと思う。先行研究をご存知のかたはご教示いただきたい。

### I 定式化と問題

利潤関数を  $\Pi(\mathbf{x})$  で表す。生産要素の数は  $n$  で、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$  は生産要素の投入量ベクトルである。

利潤極大化問題

$$\max \Pi = \Pi(\mathbf{x}), \text{ choose } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (1)$$

と、模索運動

$$\dot{x}_i = \alpha_i \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad \alpha_i > 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2)$$

との関係を考える。ただし、 $\alpha_i$  は調整係数である。

利潤極大化問題(1)の一階の条件と、模索運動(2)の停止点は一致し、ともに、そこにおける  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  は、

$$\frac{\partial \Pi(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

を満たす。

このもとで、利潤極大化の二階の条件は、利潤関数のヘッシアン

$$\mathbf{H} := \begin{bmatrix} \Pi_{11}^* & \Pi_{12}^* & \Pi_{13}^* & \cdots & \Pi_{1n}^* \\ \Pi_{12}^* & \Pi_{22}^* & \Pi_{23}^* & & \Pi_{2n}^* \\ & \vdots & & \ddots & \\ \Pi_{1n}^* & \Pi_{2n}^* & \Pi_{3n}^* & \cdots & \Pi_{nn}^* \end{bmatrix}$$

が負値定符号になることである。ただし、 $\Pi_{ij}^* := \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial x_j \partial x_i}$  である。

対称行列  $\mathbf{H}$  が負値定符号であることは、次のいずれとも同値である。

- (i)  $\mathbf{H}$  の  $k$  次の首座小行列式を  $|\mathbf{H}_k|$  とすると、 $k=1, 2, 3, \dots$  となるごとに、 $|\mathbf{H}_k| < 0, > 0, < 0, > 0, \dots$  となる。
- (ii)  $\mathbf{H}$  のすべての固有値が負である。

他方、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  の近傍で(2)を線形近似すると、

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{H} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), \quad \boldsymbol{\alpha} := \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & \alpha_2 & & \mathbf{0} & \\ & & \alpha_3 & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

となるので、ここにおける運動の局所安定性は、(2)の偏導関数のヤコビアン  $\boldsymbol{\alpha} \mathbf{H}$  の固有値がすべて負になることである。調整係数行列  $\boldsymbol{\alpha}$  がかかってなければ、利潤極大化問題の二階の条件を満たして  $\mathbf{H}$  が負値定符号ならば、固有値がすべて負であることはただちに言える。しかし  $\boldsymbol{\alpha} \mathbf{H}$  は対称行列ではないので定符号行列の定理は適応できない。

そこで本稿の問題は次の命題を証明することである。

命題：対称行列  $\mathbf{H}$  が負値定符号  $\iff \boldsymbol{\alpha} \mathbf{H}$  の固有値はすべて負

## II 命題の証明

$\alpha\mathbf{H}$  の固有値とは、次の式を満たすスカラー  $\lambda$  である。

$$\lambda\mathbf{u} = \alpha\mathbf{H}\mathbf{u} \tag{3}$$

ただし  $\mathbf{u}$  は固有ベクトルである。

今、調整係数の平方根を要素に持つ対角行列

$$\sqrt{\alpha} := \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & & & \\ & \sqrt{\alpha_2} & & & \\ & & \sqrt{\alpha_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sqrt{\alpha_n} \end{bmatrix}$$

を定義すると、 $\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha} = \alpha$ 、また、

$$\sqrt{\alpha}^{-1} := \begin{bmatrix} 1/\sqrt{\alpha_1} & & & & \\ & 1/\sqrt{\alpha_2} & & & \\ & & 1/\sqrt{\alpha_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1/\sqrt{\alpha_n} \end{bmatrix}$$

となる。

すると、(3)に  $\sqrt{\alpha}^{-1}$  を左乗することにより、

$$\begin{aligned} \lambda\sqrt{\alpha}^{-1}\mathbf{u} &= \sqrt{\alpha}\mathbf{H}\mathbf{u} \\ &= \sqrt{\alpha}\mathbf{H}\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha}^{-1}\mathbf{u} \end{aligned}$$

これは、 $\sqrt{\alpha}^{-1}\mathbf{u}$  が  $\sqrt{\alpha}\mathbf{H}\sqrt{\alpha}$  の固有ベクトル、 $\lambda$  が  $\sqrt{\alpha}\mathbf{H}\sqrt{\alpha}$  の固有値であることを示す。  
 $\sqrt{\alpha}\mathbf{H}\sqrt{\alpha}$  の  $i$  行  $j$  列要素は、 $\sqrt{\alpha_i}\sqrt{\alpha_j}H_{ij}$  なので  $j$  行  $i$  列要素と同じであり、これは対称行列である。よって負値定符号についての上記の定理が適用できる。

すると、 $\sqrt{\alpha}\mathbf{H}\sqrt{\alpha}$  の任意の  $k$  次の首座小行列式は、

$$|\sqrt{\alpha_k}\|\mathbf{H}_k\|\sqrt{\alpha_k}| = |\sqrt{\alpha_k}\|\sqrt{\alpha_k}\|\mathbf{H}_k| = |\alpha_k\|\mathbf{H}_k| = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_k|\mathbf{H}_k|$$

となり、正負が  $\mathbf{H}$  の  $k$  次の首座小行列式と一致する。

よって、 $\mathbf{H}$  が上記(i)を満たし負値定符号ならば、 $\sqrt{\alpha}\mathbf{H}\sqrt{\alpha}$  も上記(i)を満たし負値定符号となる。ゆえに上記(ii)より  $\lambda$  はすべて負となる。 $\lambda$  は  $\alpha\mathbf{H}$  の固有値でもあったから、 $\alpha\mathbf{H}$  の固有値は

すべて負。これは逆も成り立つ。q.e.d.

### Ⅲ 議 論

$\alpha H$  を  $\sqrt{\alpha} H \sqrt{\alpha}$  に転換することで、固有ベクトルが  $\mathbf{u}$  から  $\sqrt{\alpha}^{-1} \mathbf{u}$  に変わったということは、要素投入量  $x_i$  を  $x_i/\sqrt{\alpha_i}$  に尺度転換していることを意味する。(2)式を見よ。第  $i$  財の日常尺度の次元を [トン] としよう。すると、左辺の次元は [トン]/[時間] である。右辺  $\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}$  の次元は [円]/[トン] である。よって、 $\alpha_i$  の次元は、[トン]<sup>2</sup>/[円・時間] である。ここから、 $x_i/\sqrt{\alpha_i}$  の次元は [円・時間] の平方根になり、財の種類にかかわらず共通の単位に還元されていることになる。

すなわち、(2)式の両辺を  $\sqrt{\alpha_i}$  で割れば、 $x_i/\sqrt{\alpha_i}$  の時間変化が、利潤の  $x_i/\sqrt{\alpha_i}$  による微分に等しいという式が得られ、調整係数が1となるように計数尺度が転換されたことになる。この場合、目的関数の偏導関数のヤコビアンはヘッシアンと全く同じものになり、極大化の二階の条件と模索運動の局所安定条件の同値性はただちに言える。