

宇野・伊藤「恐慌」モデルの動学

——置塩・伊藤論争におけるセイ法則の位置づけ——

熊澤大輔

マルクス経済学において恐慌論は、「生産と消費の矛盾（商品過剰論）」を基軸とする恐慌論と「資本の絶対的過剰生産（資本過剰論）」を根拠とする恐慌論に大別される。前者を代表するモデルとしては、ハロッド＝置塩モデル、後者を代表するモデルとしては、Goodwinモデルがよく知られている。しかし、わが国において後者を代表する1つである宇野恐慌論については、未だモデル化されておらず、その動学が明らかにされていない。本稿の目的は、置塩信雄・伊藤誠（1987）の論争を手掛かりに、宇野恐慌論を正確にモデル化し、その運動を検討することにある。両学派間では、置塩・伊藤の論争以来、積極的な議論がなされておらず、両者が主張する体系の相違を明らかにする必要がある。特に、実質賃金率の決定についての両者の見解は正面から対立しており、置塩は、労働市場で実質賃金率決定はセイ法則体系を意味する、と主張しているのに対して、伊藤は、投資関数が存在し、財市場において一時的な不均衡が生じており、反セイ法則体系であると完全に否定している。本稿では、両者の論争を通じて、置塩が解釈する宇野恐慌モデルはセイ恒等式（Say's Identity）体系であり、伊藤が主張する体系はセイ方程式（Say's equality）体系であることを明らかにする。そして、セイ方程式体系である宇野・伊藤「恐慌」モデルにおいては、財市場の調整速度が十分速いとき、販売と購買の分裂を原因とはしないが、不連続な運動であるカタストロフが生じ得ることを論証する。

1. 置塩の宇野・伊藤批判

置塩・伊藤（1987）における論争で、恐慌に関する決定的な相違点は、i) 実質賃金率の決定、ii) 恐慌の必然性の論証方法、の2つにある。ii) はi) の見解の相違に基づいたものであると言えるので、¹⁾ 実質賃金率が財市場・労働市場どちらで決定されるのか、ということが同書における最大の争点である。本節では、置塩が労働市場での実質賃金率決定の何を批判しているのかを明らかにする。

1-1. セイ恒等式の成立

置塩の批判は、宇野・伊藤批判というよりは、マルクスその人自身への批判という側面が強い。すなわち、マルクスが『資本論』第I巻23章で述べている、貨幣賃金率の上昇→利潤率の低下というプロセスが原理的に生じる、ということを否定する。置塩の批判は次の理由に基づく。貨幣賃金率上昇→利潤率低下が生じるには、実質賃金率の上昇を言わなければならない。それには、

価格決定について論じる必要があり、そのために蓄積需要（投資）の決定に関する分析は欠かせない²⁾。しかし、宇野・伊藤もこの分析を十分には行っていない³⁾、と述べている。よって、投資関数が存在しないということが批判の1つである。そして、投資関数が存在せず、かつ、実質賃金率が労働市場で決定されるならば、セイ法則を前提にすることになる、と論じている⁴⁾。これについては、同書において、次のように説明がなされている。

いま、総供給 X 、消耗生産財を Z 、賃金総計を W 、利潤総計を Π 、とすると、

$$X = Z + W + \Pi \quad (1-1)$$

他方、総需要を D 、補填需要を Z とし、労働者は賃金総計をすべて消費支出するとし、資本家は、利潤のうち $\alpha\Pi$ だけ消費需要し、蓄積を I だけ行くとすれば、

$$D = Z + W + \alpha\Pi + I \quad (1-2)$$

となる。需給一致 ($X=D$) の条件は、(1-1) (1-2) 式を整理すると、次のようになる。

$$(1-\alpha)\Pi = I \quad (1-3)$$

セイ法則は (2-3) 式の左辺（供給）が右辺（需要）を決定する関係にあるとき成立する。実質賃金率が労働市場で決定される場合、左辺が右辺を決定し、セイ法則が成立することは明らかである。いま、利潤 Π と蓄積 I を、価格 P と資本ストック K で除して、利潤率（賃金後払い）とすると (1-3) 式は、

$$(1-\alpha)\left(\frac{X}{PK} - \frac{Z}{PK} - \frac{W}{PK}\right) = \frac{I}{PK} \quad (1-4)$$

となる。実質賃金率 R 、資本労働比率 n とすると、 $W/PK = Rn$ と表せる。また、 $I/(PK) = g$ 、 $X/(PK) = \sigma$ 、 $Z/(PK) = \phi$ とする。技術不変であれば、 n 、 σ 、 ϕ は定数となるので、(1-4) 式は次のように書ける。

$$(1-\alpha)(\sigma - \phi - Rn) = g \quad (1-5)$$

左辺の実質賃金率 R が労働市場で決定されるならば、左辺で動かせる変数はなくなる。しかも、宇野・伊藤体系は投資関数が存在しないので、右辺が左辺に合わせて従属的に決定されても、問題なく体系が完結することになる。

このように、投資関数が存在せず、需給が事前的に一致する体系は、特にセイ恒等式 (Say's Identity) と呼ばれている⁵⁾。これは、厳密に定義すると、財の超過需要を \mathbf{X} として、

$$\mathbf{X} = 0 \quad (1-6)$$

と表せる⁶⁾。したがって、セイ恒等式の下では、財市場が無条件均衡しており、一般的過剰生産恐慌がそもそも存在し得ない体系なのである。つまり、置塩は、投資関数が存在せず、労働市場で実質賃金率が決定されると仮定することは、セイの恒等式を前提することになり、恐慌が発生しない体系となることを批判しているのである。

1-2. 置塩の想定する宇野「恐慌」モデル

ここでは、置塩が批判している、1) 労働市場での実質賃金率の決定、2) 投資関数の欠如、3) セイの恒等式、という3つの特徴を併せ持った宇野「恐慌」モデルを構築し、その運動を考察する。結果、置塩の解釈する宇野「恐慌」モデルでは、スムーズな循環運動が生じており、恐慌のような不連続な運動がそもそも生じない体系であることを明らかにする。1) 2) 3) を踏

まえると、モデルは次のように書ける。

Y^s : 総生産量 Y^d : 総需要量 N^s : 労働供給量 N^d : 雇用量 K : 資本ストック R : 実質賃金率 I : 投資 σ : 資本-産出比率 r : 利潤率 n : 資本-労働比率 ν : 労働人口増加率 l : 資本労働供給比率 $\Pi = pY - wN^d$: 総利潤

$$Y^s = \sigma K \quad (1-7)$$

$$Y^d = RN^d + (1-s)\Pi + I \quad (1-8)$$

$$\dot{R} = \theta(1 - N^s/N^d) \quad \theta > 0 \quad (1-9)$$

$$\dot{N}^s = \nu N^s \quad (1-10)$$

$$N^d = nK \quad (1-11)$$

$$l = N^s/K \quad (1-12)$$

$$g = I/K \quad (1-13)$$

$$r = (pY - wN^d)/pK = \sigma - Rn \quad (1-14)$$

(1-7) は生産関数, (1-8) は需給均衡式, (1-9) は実質賃金率の決定方程式, 残る方程式は定義式である。未知数は Y^s , Y^d , N^s , N^d , R , l , g , r で8つ, 方程式8本で体系は閉じている。

(1-9) 式は, 労働市場での実質賃金率決定を表しており, (1-8) 式より, 投資(蓄積)は財市場を均衡させるように従属的に決定されている。もちろん, この体系に投資関数は存在しない。

(1-7)~(1-14) 式は, 整理すると次の2本の運動方程式となる。

$$\dot{r} = \theta(l - n) \quad (1-15)$$

$$\dot{l} = (\nu - sr)l \quad (1-16)$$

それぞれの定常解は $r_* = \nu/s$, $l_* = n$ である。まず, 局所的運動をみるために, 定常解近傍で線形一次近似すると,

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -sl_* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r - r_* \\ l - l_* \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

特性方程式 $|\lambda I - A| = 0$ は

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\theta \\ sl_* & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \theta sl_* = 0 \quad (1-18)$$

となり, $\lambda = \pm \sqrt{\theta sl_*} i$ 純虚根であるから, 定常解は渦心点(center)となる。次に, 大域的な運動であるが, これは (1-15) (1-16) から時間 t を消去して積分を行うと,

$$\frac{1}{2} sr^2 - \nu r + \theta(l - n \ln l) = C \quad C: \text{積分定数} \quad (1-19)$$

となる。右辺を V とおくと, \dot{V} は

$$\dot{V} = sr\dot{r} - \nu\dot{r} + \theta\left(\dot{l} - n\frac{\dot{l}}{l}\right) = \theta(l - n)(sr - \nu) - \theta(sr - \nu)(l - n) = 0 \quad (1-20)$$

となるので, 大域的にも初期値によって決まる閉軌道を描くことになる。この体系を図示するために, (1-19) の左辺に r , 右辺に l をまとめて整理すると,

$$\nu r - \frac{1}{2} sr^2 = \theta(l - n \log l) + C \quad (1-21)$$

となる。左辺を $f(r)$, 右辺を $h(l)$ として,

$$f(r) = \nu r - \frac{1}{2} s r^2 = -\frac{1}{2} s \left(r - \frac{\nu}{s} \right)^2 + \frac{\nu^2}{2s} \quad (1-22)$$

$$h(l) = \theta(l - n \log l) + C$$

それぞれの関数を四面図で描くと次のようになる。

図1 置塩解釈による宇野「恐慌」モデルの運動

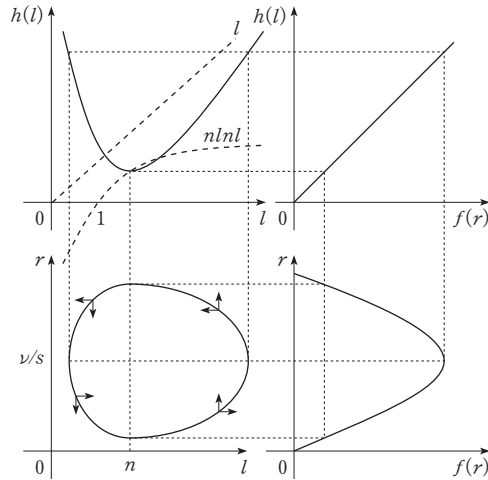


図1の左下図をみると、このモデルはスムーズに循環運動しており、恐慌のような不連続な運動が生じないことは明らかである。また、利潤率が回復する局面 ($r < \nu/s$, $l > h$) において失業が増大しており、利潤率が後退する局面 ($r > \nu/s$, $l < h$) において失業が減少する。これは資本制の景気循環とは明らかに異なる。実は、以上の特徴は、そのまま Goodwin モデルにも妥当する⁷⁾。つまり、置塩は、宇野「恐慌」モデルを、Goodwin モデルと本質的に同じモデルとみなしており、両体系の運動が恐慌を捨象したものになることを批判していたのである。

2. 伊藤の置塩に対する反批判

伊藤は、1) 労働市場での実質賃金率の決定、2) 投資関数の欠如、3) セイの恒等式、という置塩の批判についてどのように応えているのであろうか。1) については、宇野・伊藤が「資本過剰論」を基礎とする理論である限り、前提とされなければならない。実際、伊藤は1) を前提にした下でも、2)、3) は該当せず、反セイ法則体系になる、と主張している⁸⁾。以下では、伊藤が2)、3) の批判に対して具体的にどのように応えているかを確認した後、伊藤の反批判を踏まえた上で、宇野恐慌論を正確にモデル化することに努める。

2-1. セイ方程式の成立

まず、伊藤は2) について、投資需要の大きさは利子率を含めて考えており、利潤率と利子率の衝突を通じて恐慌が発生する、と応えている⁹⁾。この伊藤の主張は、置塩が重要でないとして捨象した¹⁰⁾、好況末期の利子率上昇というプロセスを重視している点に特徴がある¹¹⁾。また3) につい

て、伊藤は財市場では需給の不一致が絶えず生じており、セイ法則は成立していない、と応えている。¹²⁾ よって、伊藤の反批判を簡潔にまとめると、1) の労働市場での実質賃金率の決定を堅持しつつも、投資関数は存在するので2) は妥当しない。よって、3) は成立せず、不均衡は生じているので反セイ法則体系となる、ということになる。以下では、この伊藤の立論が正しいものであるか、確認していくことにしよう。そのためには、まず、伊藤が存在するという、投資関数を定式化する必要があるので、マルクス・宇野の叙述から具体的に導出していく。

蓄積についてのマルクス・宇野の基本的な見解をみると、マルクスは蓄積が減退する点について「資本を養う剰余労働がもはや正常な量では供給されなくなる点に触れるやいなや、そこに反動が現れる。…蓄積は衰え、賃金の上昇運動は反撃を受ける。」(K・マルクス p.810) と、述べている。一方、宇野は、この点をより具体的に「資本としての貸付資本を通して、利潤率の低落と利子率の昂騰との矛盾、衝突」(宇野 p.95) する点であると述べている。つまり、蓄積は利潤率と利子率が等しくなる点においてゼロになると主張しており、投資関数は、蓄積率を $g=I/K$ として、

$$g(r-i) \quad g(0)=0 \quad (2-1)$$

と表すのが最も単純な定式化であると考えられる。(2-1) の投資関数は、利子率が上昇により蓄積率が減退し、利潤率と利子率が等しいとき、蓄積率が停止する。よって、上述の主な見解を満たしていると言える。

さて、この投資関数のもとで伊藤の前述した立論が成立するか確認していこう。前節で置塩がセイ恒等式であることを論証した方法と同じ手順をとると、(1-5) 式の需給均衡式は、投資関数(2-1) 式を組み込むことによって、次のように書ける。

$$(1-\alpha)(\sigma-\psi-Rn)=g(r-i) \quad (2-2)$$

上式左辺は、実質賃金率 R 以外は定数であり、かつ、 R も労働市場で決定されるので動かさない。他方、右辺には投資関数が存在しているので、左辺と右辺は不均衡であることがあり得る。では、この不均衡はどのように調整されるのか。いずれにしろ、左辺は先決されているので、右辺が調整する必要がある。右辺の利潤率 r は定義により、 $r=\sigma-\psi-R$ なので、これも労働市場で決定される変数であり、右辺の調整変数とはなり得ない。したがって、右辺で唯一未決定である利子率 i が動くことで需給一致が達成されることになる。この体系では、確かに需給の不均衡は生じているが、事後的には左辺(供給)が右辺(需要)を決定している構造となっている。このように、投資関数は存在するが、事後的に供給に合わせて需要が調整され、財市場が均衡する体系は、セイ方程式(Say's Equality)と呼ばれている。¹³⁾ つまり、宇野・伊藤体系は、置塩が批判しているセイ恒等式体系にはなっていないが、セイ方程式体系となっており、依然として供給に合わせて需要が決定されるセイ法則体系なのである。すなわち、収入はすべて商品(財および債券)に必ず支出されているのであり、販売と購買の分裂は生じ得ないのである。

一方で、利子率が、財市場の状態決定される(2-2) 式は奇妙に思えるかもしれない。しかし、この利子率の決定は、宇野・伊藤体系がセイ方程式体系であることと整合的であることを確認しておく。セイ方程式体系下では、事後的には収入はすべて支出されているのではあるが、財に支出するのか、債券に支出するのか、という選択の余地は残されている。つまり、財市場で超過需要があり、同額だけの債券市場の超過供給があるというケースを含む。当然、その逆のケース

もあり得るので、セイ方程式体系は、厳密には債券の超過需要を \mathbf{B} とすると、

$$\mathbf{X} + \mathbf{B} \equiv 0 \quad (2-3)$$

と定式化できる。¹⁴⁾(2-3) が成立するのであれば、財市場と債券市場がちょうど逆の関係になるため、財市場の状態が利率が決定されると言ってもよいのである。これは結局のところ、貸付資金の需給によって利率が決定されるということである。貯蓄（利潤） $>$ 投資のとき、貸付資金の供給増となるため、利率が低下し、貯蓄 $<$ 投資のとき、貸付資金の供給減となり、利率が上昇する、ことを意味している。これは、宇野の叙述とも一致していることが解る。¹⁵⁾また、このセイ方程式体系では、セイ恒等式体系とは異なり、財市場の一般的過剰生産が起り得る。しかしながら、これはマルクスの言う販売と購買の分裂に基づく過剰生産ではないことに留意する必要がある。

前節を含めた、以上の置塩・伊藤論争は次のように要約できよう。置塩は、宇野体系が、労働市場で実質賃金率が決定され、投資関数が存在しないセイ恒等式 ($\mathbf{X} \equiv 0$) 体系であると解釈したのに対して、伊藤は投資関数が存在しており、一時的な不均衡が生じる反セイ法則体系であることを主張した。しかし、伊藤の主張を踏まえた宇野体系は、事後的に供給に合わせて需要が調整されるセイ方程式 ($\mathbf{X} + \mathbf{B} \equiv 0$) 体系になっていることを、本節では明らかにした。したがって、置塩の言う、宇野体系は販売と購買の分裂（流動性選好）が生じないセイ法則 (Say's law) 体系である、という批判は伊藤の主張を踏まえても、なお妥当することが解った。では、マルクスの言う販売と購買の分裂を導入して、反セイ法則体系を構築するにはどうすればよいのか。これは貨幣の超過需要を \mathbf{M} とすると、 $\mathbf{X} + \mathbf{B} + \mathbf{M} \equiv 0$ という体系を想定すればよい。この体系では、貨幣市場が超過需要となるケースが存在する ($\mathbf{M} > 0$)。つまり、貨幣以外の商品がすべて超過供給となり ($X < 0, B < 0$)、販売と購買が分裂した状態を分析できることを意味している。

2-2. 宇野・伊藤「恐慌」モデルの構築

宇野・伊藤体系が、置塩の解釈と異なるのは、1) 投資関数が存在しており、2) 一時的に財市場の不均衡が生じると想定していることにある。そして、前項で示したように、3) セイ方程式が成立していることから、利率が財市場によって決定される点に特徴がある。利率を i とすると、伊藤の主張する1) 2) 3) の点を考慮したモデルは次のように書ける。

$$Y^s = \sigma K \quad (2-4)$$

$$Y^d = w/pN^d + (1-s)II + I \quad (2-5)$$

$$N^d = nK \quad (2-6)$$

$$\dot{N}^s = \nu N^s \quad (2-7)$$

$$l = N^s / K \quad (2-8)$$

$$g(r-i) = I/K \quad (2-9)$$

$$r = \sigma - Rn \quad (2-10)$$

$$\dot{w} = \varphi(1 - N^s/N^d) \quad \varphi > 0 \quad (2-11)$$

$$\dot{p} = \alpha(g - sr) \quad \alpha > 0 \quad (2-12)$$

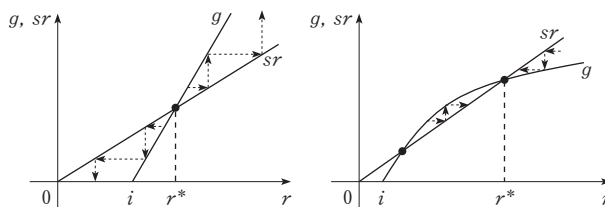
$$\dot{i} = \beta(g - sr) \quad \beta > 0 \quad (2-13)$$

(2-4) は生産関数、(2-9) は投資関数、(2-11) は貨幣賃金率の運動方程式、(2-12) は価格の運

動方程式，(2-13)は利子率の運動方程式，残る方程式は定義式である。未知数は， $Y^s, Y^d, N^s, N^d, l, g, r, w, p, i$ の10，方程式10本で体系は閉じている。伊藤の主張するところは，次のようにして取り入れられている。まず，(2-9)式により，投資関数が存在している。また，需給の不均衡が存在しており，その過不足は(2-12)式から，価格によって調整が行われる。そして，(2-13)式から，利子率は財市場の状態決定されるよう定式化されており，セイ方程式体系となっている。また，(2-12)式より，労働市場で実質賃金率が単純に決定されなくなるので，労働市場では(2-11)式のように，失業率に応じて貨幣賃金率が運動するように定式化されている¹⁶⁾。

さて，宇野・伊藤「恐慌」モデルの運動の検討に入る前に，価格のスムーズな財市場の調整過程を想定するには，投資関数 $g=g(r-i)$ が $g'>0, g''<0$ という形状になる必要があることを確認しておく¹⁷⁾。これは， $r-g$ 平面に財市場均衡の様子を図示すると明らかである。縦軸に貯蓄(財供給) sr および投資(財需要) g をとり，横軸に利潤率 r をとると，財市場均衡の様子は次のように描ける。

図2 価格の調整作用と投資関係の形状



左図は，投資関数が線形の場合の価格の調整過程を示している。均衡は1つであり，均衡から右外れると，超過需要となり，他の事情が変わらなければ，価格上昇を通じて利潤率が上昇するので，需給ギャップは拡大し続け発散する。また，左にずれると逆の発散運動となる。したがって，価格調整が需給を一致させる方向に作用するには，投資 g が貯蓄 sr を上から下に横切る必要がある。そのためには， $r=i$ のとき $g(0)=0$ だから，右図のように投資関数が増加逓減関数となり，少なくとも解が2つ存在しなければならない。このとき，大なる均衡は安定解となり，価格調整が需給を一致させる方向に作用する。よって，以下では投資関数は $g'>0, g''<0$ であるとの前提の下，分析を進めていく。

3. 宇野・伊藤「恐慌」モデルの運動

本節以降では，宇野・伊藤「恐慌」モデルの運動を検討し，1-2節でみた置塩の解釈する宇野「恐慌」モデルとの，動学的相違を明らかにすることを目的としている。両モデルの最大の相違は，前者のモデルが，スムーズな循環運動をするのに対し，後者のモデルは，不連続な運動であるカタストロフが発生し得る体系となっていることにある。前節で明らかにしたように，宇野・伊藤「恐慌」モデルは，セイ方程式体系($\mathbf{X}+\mathbf{B}=0$)であり，販売と購買の分裂は存在しないが，財市場で一般的過剰生産が生じる体系である。したがって，財市場で不均衡が累積し，恐

慌に準じた現象が発生する可能性がある。この問題については、次節で本格的に検討するとして、本節では、まず、モデルの局所的運動について検討した後、大域的には極限周期軌道(リミットサイクル)が存在していることを、Hopf分岐定理を用いて確かめていく。特に、後者の証明については、宇野恐慌論が自由主義段階の周期的恐慌を分析対象としていることを考えると重要である¹⁸⁾。

さて、前節の(2-4)~(2-13)式は、次の4つの運動方程式に整理することができる。

$$\dot{p} = \alpha[g(r(w/p) - i) - sr(w/p)] \quad (3-1)$$

$$\dot{i} = \beta[g(r(w/p) - i) - sr(w/p)] \quad (3-2)$$

$$\dot{w} = \varphi(1 - l/n) \quad (3-3)$$

$$\dot{l} = [\nu - g((r(w/p) - i))] \cdot l \quad (3-4)$$

以下では、この4つの運動方程式を用いて分析を進めていく。

3-1. 局所的運動

最初に、宇野・伊藤「恐慌」モデルの定常解における諸変数の決定関係を明らかにするとともに、解の存在条件を導出する。その後、定常解近傍で線形化を行い、モデルの局所的運動について考察することで、価格-利子率の調整速度比が、解の存在条件および局所的運動の安定性を決める重要な変数となっていることをみていく。

(1) 定常解と解の存在条件

モデルの定常解は運動が停止する点、すなわち、 \dot{p} 、 \dot{i} 、 \dot{w} 、 \dot{l} がゼロのときなので、

$$0 = [g(r(w/p) - i) - sr(w/p)] \quad (3-5)$$

$$0 = \varphi(1 - l/n) \quad (3-6)$$

$$0 = [\nu - g(r(w/p) - i)] \cdot l \quad (3-7)$$

が成立するときである。このとき $r_* = \nu/s$ 、 $l_* = n$ 、 $g_* = \nu$ であり、定常解は次のようにして決まることになる。まず、(3-7)式から外生変数 ν により、 g_* が決定され、(3-5)式より、財市場を均衡させるように r_* が定まる。このときの財市場均衡式は $g_*(r_* - i) = sr_*$ となっているので、ここから i_* も一意に導出されることになる。しかし、残る p_* 、 w_* については、(3-5) (3-6) (3-7)式からだけでは決定されないことに留意する必要がある。いま、(3-1) (3-2)式を整理すると、 $di/dp = \beta/\alpha$ となる。この価格-利子率の調整速度比 $\beta/\alpha = \varepsilon$ と定義して、 $di/dp = \varepsilon$ を積分すると、

$$\int_0^t di = \varepsilon \int_0^t dp \Rightarrow i = \varepsilon(p - p_0) + i_0 \quad (3-8)$$

という関係が導きだすことができる¹⁹⁾。つまり、定常解 p_* は、体系から一意に決定される i_* のほかにも初期値 p_0 、 i_0 にも依存することになる。最後の w_* は、 $r_* = \nu/s$ を考慮すると、

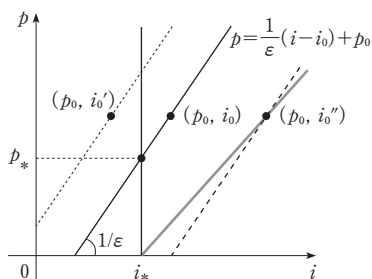
$$r = \sigma - \frac{w}{p}n \Rightarrow w_* = \frac{p_*}{n} \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \quad (3-9)$$

となることから、 p_* が決定すれば(3-9)式を満たすように w_* が決定されることになる。よって、 p_* 、 w_* の2つ、初期値が変われば、その定常解も変化することになる。このような定常解の性質は、(2-13)式のように、利子率の決定が財市場で決定されると定式化したことに拠っている。すなわち、セイの方程式体系の下では、定常解の一部が必ず初期値に依存する、という特

徴をもつことになる。

次に、解の存在条件について考察していこう。まず、(3-5) (3-7) 式が同時に成立するためには、労働人口成長率 ν が、財市場を均衡させる最大成長率 $s\sigma$ よりも小さくなければならない²⁰⁾。したがって、 $\nu < s\sigma$ であることが、定常解が存在するためのそもそもの条件であり、以下ではこれを前提とする。また、前述したように p_* 、 w_* は初期値にも依存していることから、初期値如何によっては解が存在しないケースも考えられる。この点を明らかにするため、いま、外生変数 ν が所与で g_* 、 r_* 、 i_* は一意に確定している状況を考え、このときの p_* 、 w_* の決定について考察していく。これは、 $p-i$ 平面に図示すると次のように書ける。

図3 定常解と解の存在条件



p_* は、(3-5) (3-7) 式から既に確定している i_* における垂直線と、(3-8) 式を p について解いた直線との交点で決定されることになる。いま、初期値 i_0 が定常解 i_* よりも左にあるケースをみると (p_0, i_0') 、傾き $1/\epsilon > 0$ であるので、必ず垂直線 i_* との交点をもち定常解は必ず存在することになる（点線）。一方、初期値 i_0 が定常解 i_* よりも右にある場合 (p_0, i_0'') 、傾き $1/\epsilon$ が大きいならば交点をもたないケースがあり得る（破線）。したがって、定常解 p_* 、 w_* は、初期値 (p_0, i_0'') から $(0, i_*)$ に引いた直線（灰色線）の傾きより、 $1/\epsilon$ が小さくなければ存在しないことになる。よって、解の有無は、

$$\epsilon_* = \frac{i_0 - i_*}{p_0} \tag{3-10}$$

を境にして決定されることになる。以上を整理すると、 $i_* > i_0$ のとき定常解 p_* 、 w_* は常に存在するが、 $i_* < i_0$ のときは、 $\epsilon > \epsilon_*$ であれば p_* 、 w_* が存在し、 $\epsilon < \epsilon_*$ であれば、 p_* 、 w_* は存在しない、ということになる。

(2)定常解近傍の安定性

続いて、定常解近傍の安定性について検討していこう。価格 p_* 、利子率 i_* は、(3-8) 式を満たすように決定されることが解ったので、財市場で決まる運動方程式 (3-1) (3-2) 式のうち、どちらか一方の運動を体系から導きだせば、残りは (3-8) 式を通じて決定されるので簡単になる。ここでは、価格の運動方程式 (3-1) に着目し、次の3式を解いていくことにする。

$$\dot{p} = \alpha [g(r(w/p) - i(p)) - sr(w/p)] \tag{3-1'}$$

$$\dot{w} = \varphi(1 - l/n) \tag{3-3'}$$

$$\dot{l} = [\nu - g(r(w/p) - i(p))] \cdot l \tag{3-4'}$$

(3-1') (3-3') (3-4') 式を定常解近傍で線形化し、ヤコビアンを求めると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{w} \\ \dot{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi/n \\ A_{31} & A_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p-p_* \\ w-w_* \\ l-l_* \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

各成分は以下のようにして計算できる。ただし, (3-8) (3-9) 式より

$$\frac{di}{dp} = \varepsilon, \quad \left(\frac{dr}{dp}\right)_* = \frac{1}{p_*} \left(\sigma - \frac{\nu}{s}\right), \quad \left(\frac{dr}{dw}\right)_* = -\frac{1}{w_*} \left(\sigma - \frac{\nu}{s}\right)$$

である。

$$A_{11} = \alpha \left[(g'_* - s) \left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)_* - g'_* \frac{di}{dp} \right] = \alpha \left[(g'_* - s) \frac{1}{p_*} \left(\sigma - \frac{\nu}{s}\right) - g'_* \varepsilon \right] \quad (3-12)$$

$$A_{12} = \alpha \left[(g'_* - s) \left(\frac{\partial r}{\partial w}\right)_* \right] = -\alpha (g'_* - s) \left(\sigma - \frac{\nu}{s}\right) \frac{1}{w_*} \quad (3-13)$$

$$A_{31} = -g'_* \left[\left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)_* - \frac{di}{dp} \right] l_* = -g'_* \left[\frac{1}{p_*} \left(\sigma - \frac{\nu}{s}\right) - \varepsilon \right] n = g'_* n \left[\varepsilon - \frac{1}{p_*} \left(\sigma - \frac{\nu}{s}\right) \right] \quad (3-14)$$

$$A_{32} = -g'_* \left(\frac{\partial r}{\partial w}\right)_* l_* = g'_* \left(\sigma - \frac{\nu}{s}\right) \frac{1}{w_*} n \quad (3-15)$$

(3-15) (3-11) 式より, 特性方程式 $|\lambda I - A| = 0$ は,

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - A_{11} & -A_{12} & 0 \\ 0 & \lambda & \varphi/n \\ -A_{31} & -A_{32} & \lambda \end{vmatrix}$$

となる。これをサラスの法則を用いて展開すると,

$$f(\lambda) = \lambda^3 - A_{11}\lambda^2 + \frac{\varphi}{n} A_{32}\lambda + \frac{\varphi}{n} (A_{12}A_{31} - A_{11}A_{32}) \quad (3-16)$$

となる。ルース・フルヴィッツの安定条件により, 宇野・伊藤「恐慌」モデルが局所的に安定であるための必要十分条件は以下の通りである。²¹⁾

$$\textcircled{1} -A_{11} > 0$$

$$\textcircled{2} \varphi/n \cdot A_{32} > 0$$

$$\textcircled{3} \varphi/n \cdot (A_{12}A_{31} - A_{11}A_{32}) > 0$$

$$\textcircled{4} -\varphi/n \cdot A_{11}A_{32} - \varphi/n (A_{12}A_{31} - A_{11}A_{32}) = -\varphi/n \cdot A_{12}A_{31} > 0$$

(3-12) ~ (3-15) 式を代入してみると, $\textcircled{2}$ $\textcircled{3}$ は常に満たされており, $\textcircled{1}$ $\textcircled{4}$ については, g'_* , s の大小関係および $\varepsilon = \beta/\alpha$ の値に応じて場合分けが発生することになる。ただし, $g'_* = s$ というケースは極めて偶然な特殊ケースであるのでここでは捨象する。²²⁾ 以下では, 最初に $\textcircled{2}$ $\textcircled{3}$ の条件が常に成立することを確認した後, $\textcircled{4}$ $\textcircled{1}$ が成立する条件を明らかにしていく。

$$\textcircled{2} \frac{\varphi}{n} A_{32} = \frac{\varphi}{n} \cdot g'_* \left(\sigma - \frac{\nu}{s}\right) \frac{1}{w_*} n > 0$$

$\sigma - \nu/s = w/p \cdot n$ である。労働者への分配 (実質賃金率) がゼロという非現実的なケースは除外すべきなので $\sigma - \nu/s > 0$ となり, $\textcircled{2}$ は常に成立することになる。

$$\textcircled{3} \varphi/n \cdot (A_{12}A_{31} - A_{11}A_{32}) = \frac{\varphi}{w_*} \beta g'_* s \left(\sigma - \frac{\nu}{s}\right) > 0$$

各成分を代入すると上のように整理され, $\textcircled{3}$ も常に満たされている。²³⁾

$$\textcircled{4} - \frac{\varphi}{n} A_{12} A_{31} = \varphi g'_* \alpha \frac{1}{w_*} (g'_* - s) \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \left[\varepsilon - \frac{1}{p_*(\varepsilon)} \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \right]$$

④の不等号を確定するのは多少複雑である。上式から、 g'_* 、 s の大小および ε の値によって判別できるのであるが、 ε は p_* の中にも含まれている。よって、(3-8)式を用いて、 p_* を ε を含む式に置きかえた上で不等号を確定する必要がある。よって、(3-8)式を p_* に代入し、 ε について整理すると境界点は、

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{p_0} \left[\left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) - (i_* - i_0) \right] \tag{3-17}$$

となる。²⁵⁾したがって、 $g'_* < s$ かつ $\varepsilon < \varepsilon_0$ 、もしくは、 $g'_* > s$ かつ $\varepsilon > \varepsilon_0$ 、のとき④が成立する。

$$\textcircled{1} - A_{11} = \alpha \left[g'_* \varepsilon - (g'_* - s) \frac{1}{p_*(\varepsilon)} \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \right]$$

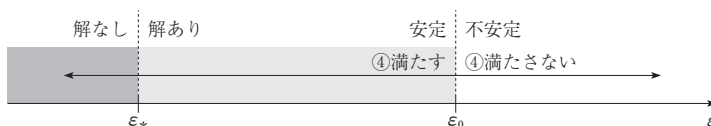
この不等号も、 g'_* 、 s の大小および ε の値によって決まる。 $g'_* < s$ のときは、 ε とは無関係に①は成立する。一方、 $g'_* > s$ のときは、 ε によっても場合分けが生じる。 ε の値が以下のとき、²⁶⁾上式の大括弧 [] 内の符号が逆転することになり、①が成立するか否かが決まる。

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{p_0} \left[\frac{(g'_* - s)}{g'_*} \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) - (i_* - i_0) \right] \tag{3-18}$$

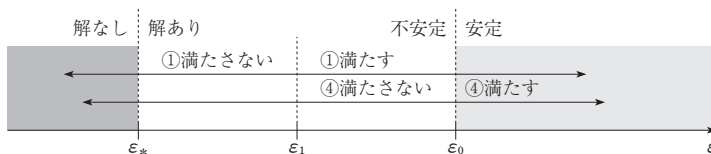
よって、 $g'_* < s$ もしくは $g'_* > s$ かつ $\varepsilon > \varepsilon_1$ 、のとき①が成立する。

以上の宇野モデルの定常解近傍の議論は、解の存在条件も合わせて g'_* 、 s の大小により2つに場合分けをし、 ε 直線上に描くと解りやすい。

i) $g'_* < s$ のとき、①②③は成立



ii) $g'_* > s$ のとき、②③は成立²⁷⁾



i) ii) をみると、定常解近傍では、外生変数である価格-利子率の調整速度比 ε と、初期値と外生変数によって定まる ε_0 、そして、 g'_* 、 s の大小関係により、モデルの安定性が決まることになる。また、i) ii) は、 ε_0 を境に安定性が全く逆となることが解る。しかし、宇野・伊藤モデルのような非線形微分方程式体系では、局所的運動が大域的運動と一致するとは必ずしも限らない。次節では、実際に、宇野・伊藤モデルでは大域的にはリミットサイクルが存在していることを、Hopfの定理を用いて論証する。

3-2. リミットサイクルの存在

Hopfの定理によると、次の3つの条件が満たされているとき、体系でリミットサイクルが存

在していることが証明される。²⁸⁾

〈Hopf 分岐定理〉

ε を外生変数とする微分方程式 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \varepsilon)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$ という体系を考えると, Hopf の定理は以下の3つを指す。

- i) 定常解 $\mathbf{x}_*(\varepsilon)$ (これは $f(\mathbf{x}_*; \varepsilon) = 0$ を満たす \mathbf{x}_*) は, ε の滑らかな連続関数である。
- ii) 特性方程式 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_*(\varepsilon_0); \varepsilon_0)| = 0$ は, 1組の純虚根 $\lambda(\varepsilon_0)$, $\bar{\lambda}(\varepsilon_0)$ を持ち, その他には実数部分がゼロになる根を持たない。ここで, $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_*(\varepsilon_0); \varepsilon_0)$ は $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_*(\varepsilon_0)$ におけるこのシステムのヤコビ行列である。

iii) $\left. \frac{d(\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} \neq 0$ である。ここで, $\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon)$ は $\lambda(\varepsilon)$ の実数部分である。

i) の条件の証明

宇野モデルでは, 外生変数 $\varepsilon = \beta/\alpha$ の値によって体系の運動が変化する。1-3-1節の(1)のみたように, ε は体系の定常解 p_* , w_* を連続的に変化させる (3-8) (3-9) 式。したがって, $p_*(\varepsilon)$, $w_*(\varepsilon)$ であり, i) の条件は満たされている。

ii) の条件の証明

この条件が成立していることは3-1節の2)より容易に分かる。この体系の特性方程式は(3-16)式で導出しており,

$$f(\lambda) = \lambda^3 - A_{11}\lambda^2 + \frac{\varphi}{n}A_{32}\lambda + \frac{\varphi}{n}(A_{12}A_{31} + A_{11}A_{32}) \quad (3-16)$$

である。これが1組の純虚根をもつための必要十分条件は, 次の通りである。²⁹⁾

$$\textcircled{1} \varphi/n \cdot A_{32} > 0$$

$$\textcircled{2} -\varphi/n \cdot A_{12}A_{31} = 0$$

①が常に成立することは同節の(2)で確認している。また, 同様に, ②については, $\varepsilon = \varepsilon_0$ のとき成立することは明らかである。したがって, ii) の条件は満たされている。

iii) の条件の証明

$$\left. \frac{d(\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} \neq 0 \text{ を証明するには, } \left. \frac{d(a_2a_1 - a_0)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} \neq 0 \text{ を示せばよい。} \quad \textcircled{30)}$$

$$a_1a_2 - a_0 = \varphi g' \cdot n \frac{1}{\alpha w_*} (g' \cdot -s) \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \left[\left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \frac{1}{p_*(\varepsilon)} - \varepsilon \right]$$

$$\left. \frac{d(a_2a_1 - a_0)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} = -\varphi g' \cdot n \frac{1}{\alpha w_*} (g' \cdot -s) \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \left[\left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \frac{1}{p_*(\varepsilon_0)^2 \varepsilon_0^2} (i_* - i_0) + 1 \right]$$

したがって, 初期値が偶然に,

$$i_0 = i_* + \frac{p(\varepsilon_0)^2 \varepsilon_0^2}{(\sigma - \nu/s)} = i_* + \sigma - \frac{\nu}{s}$$

となるときを除くと, 一般的にiii)の条件は成立する。

以上より, 宇野・伊藤モデルは, Hopf の定理の i) ii) iii) の条件を満たしており, リミットサイクルが存在することが証明された。

4. カタストロフの発生

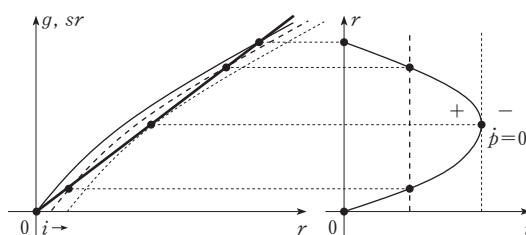
本節では、宇野・伊藤「恐慌」モデルでは不連続な運動であるカタストロフが生じ得ることを論証する。繰り返しになるが、宇野・伊藤体系は、セイ方程式 ($X+B=0$) 体系であり、販売と購買の分裂は生じないが、財市場において一般的過剰生産を引き起こす可能性がある。同モデルでは、財市場の調整が十分速い時、貨幣賃金率の上昇により、カタストロフが生じ得ることをみる。また、カタストロフ前後において、賃金率、価格、利潤率、利子率がどのように運動しているのかを考察していく³¹⁾。

以下では、(3-1)～(3-4) 式の運動方程式を、3次元位相図に記すことで、カタストロフが生じ得ることを明らかにしよう。この図式化は、以下の手順で行う。まず、価格、資本-労働供給比率の運動方程式 (3-1) (3-4) の均衡を表す $\dot{p}=0, \dot{l}=0$ 線を、 $i-r$ 面から $i-p$ 平面に、それぞれ図示していく。次に、 $i-p$ 平面に描いた両曲線と、3-1節の1) で求めた、 p, i の関係式 (3-8) 式との交点を、 $w-p$ 平面に移す。これによって、利子率の運動方程式 (3-2) 式も考慮したことになる。そして、導出した $\dot{p}=0, \dot{l}=0$ 線を $w-p$ 平面で重ね合わせて、両曲線の交点が安定となるケースと、不安定になるケースについてとりあげる。最後に、賃金率の運動方程式 (3-3) の均衡を表す $l=n$ 直線を考慮して、 $p-w-l$ の3次元図を描き、カタストロフが発生するケースについて言及する。

(1) $\dot{p}=0$ 曲線の導出

$r-g$ 平面を用いて $\dot{p}=0$ 線を $i-r$ 平面に図示すると次のように書ける。

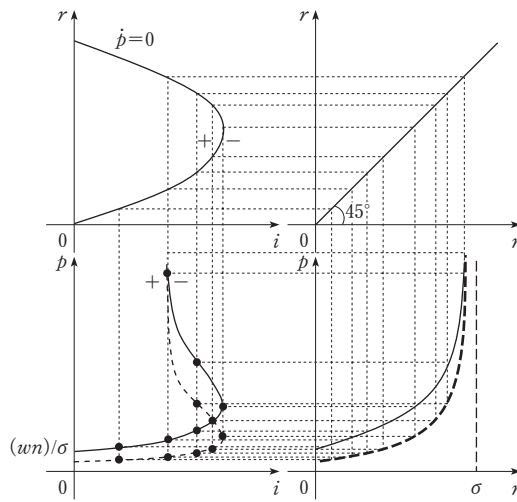
図4 $i-r$ 平面における $\dot{p}=0$ 線の導出



左図の $r-g$ 平面では、利子率 i が上昇し、実線→破線→点線の順番に投資関数 g がシフトしたときの様子を表している。このときの財市場の均衡点 r の変化を、 $i-r$ 平面に描いたものが右図である。右図において、曲線の外側の領域は超過供給 ($g < sr$) に対応しており、内側の領域は超過需要 ($g > sr$) に対応している。よって、価格 p は、曲線の外側では減少し、内側では上昇するように運動することになる。次に、この $i-r$ 平面上の $\dot{p}=0$ 線を、 $i-p$ 平面へと、四面図を用いて移していく。

右下図の $r-p$ 平面は、利潤率 $r = \sigma - (w/p)n$ を p について解いて図示したもので、 r が上昇すると p は σ に漸近しながら上昇していく。これを、先ほど導出した $i-r$ 平面の $\dot{p}=0$ 線を組み合わせると、 $i-p$ 平面に図示すると左下図のようになる。 $\dot{p}=0$ 線の切片は、 $(w/p)/\sigma$ である。 $i-p$ 平面の $\dot{p}=0$ 線は、 w が変化すると図のように変化する。すなわち、 w が減少すると、右下

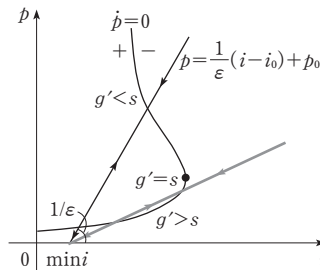
図5 $i-p$ 平面における $\dot{p}=0$ 線の導出



図の $p=wn/(\sigma-r)$ 線が傾きを変化させながら下へシフトすることになる (破線)。それに従い、左下図の $\dot{p}=0$ 曲線も「逆くの字」の形が潰れながら、下にシフトする (破線)。よって、 w が上昇したときは、 $\dot{p}=0$ 線は「逆くの字」を広げながら上にシフトする。

ここで、 $i-p$ 平面における p の運動を確認しておく。図5より、 $\dot{p}=0$ 線の内側で価格は上昇、外側では減少している。しかし、価格と利子率との間には (3-8) 式の関係があり、これを満たしながら運動することになるので、運動は初期値および ε が与えられると、たとえば次のように書ける。

図6 $i-p$ 平面における価格・利子率の運動



価格 - 利子率の調整速度比 ε と初期値 i_0, p_0 によって $i-p$ 直線 (3-8) 式的位置が決まり、 p, i は、その直線上を上図のように運動することになる。また、 $p=0$ のとき利子率は最小値をとることになる ($\min i$)。図2でみたように、価格調整により均衡が達成される点と、そうでない点が、このモデルには存在する。よって、図6の $i-p$ 平面における $\dot{p}=0$ 線と $i-p$ 直線の交点 (解) の安定性についても議論をする必要がある。 $\dot{p}=0$ 曲線の傾きは、

$$\frac{dp}{di} = \frac{1}{\frac{(g'-s)w}{g'p^2n}} = \frac{1}{\varepsilon_1} \tag{4-1}$$

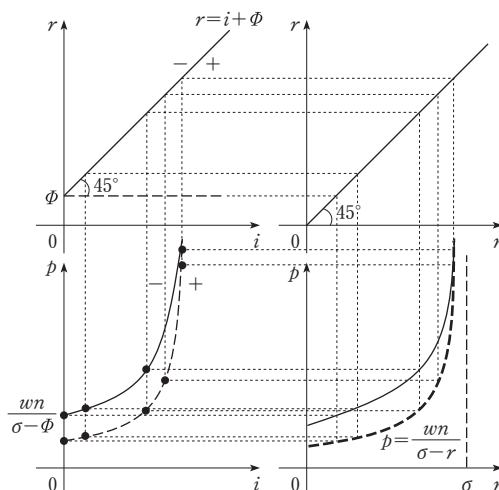
となるので、³²⁾ $g' < s$ のとき、 $\dot{p}=0$ 曲線の傾きは負となり ($\dot{p}=0$ 線上部)、(3-8) 式との交点は常

に安定となる。また、(3-8)式が実線するとき、 $g' > s$ の領域では、 $\dot{p}=0$ 線の傾きが正となり（ $\dot{p}=0$ 線下部）、の交点は不安定となる。ただし、(3-8)式の傾き $1/\varepsilon$ によっては、 $g' > s$ の領域においても交点が安定となるケースがある（灰色線）。これは、 $\dot{p}=0$ 線の傾きが(3-8)式の傾きより大きいとき、すなわち、 $\varepsilon > \varepsilon_1$ のときである。以上の考察は、1-3-1節の(2)で行った定常解近傍の安定性の議論と一致している。

(2) $\dot{l}=0$ 曲線の導出

同様に、 $\dot{l}=0$ 線も $i-r$ 平面から $i-p$ 平面へと四面図を用いて描いていこう。(3-4)式から、 $v=g(r-i)$ のとき $\dot{l}=0$ となる。いま、 $v=g(r-i)$ を満たすような、定数を $\Phi=r-i$ とすると、 $\dot{l}=0$ 線は $i-r$ 平面において、 $r=i+\Phi$ と書ける。 l の運動は、 $v > g(\Phi)$ のとき増加し、 $v < g(\Phi)$ で減少するので、これは、 $i-r$ 平面では、 $r < i+\Phi$ のとき増加、 $r > i+\Phi$ で減少することに対応する。図5と同じく、 $\dot{l}=0$ 線を四面図を用いて $i-p$ 平面へ図示すると次のように書ける。

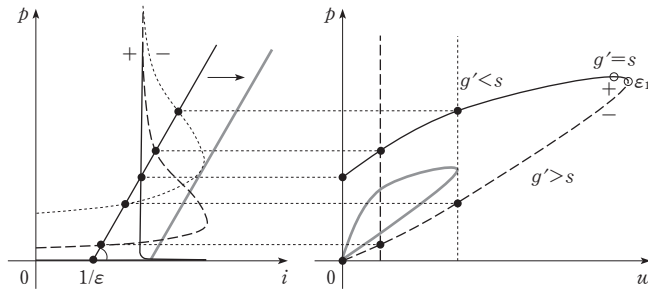
図7 $i-p$ 平面における $\dot{l}=0$ 線の導出



$\dot{l}=0$ 線の切片は、 $(wn)/(\sigma-\Phi)$ となり、 w が減少すると $\dot{l}=0$ 線も傾きを変えながら下へシフトすることになる（破線）。また、 $i-p$ 平面上における l の運動は、 $\dot{l}=0$ 線を挟んで右の領域が正となり、左の領域が負である。なお、このときの $\dot{l}=0$ 線の傾きは、 $dp/di=1/\varepsilon_0$ となっている。³³⁾

(3) $p-w$ 平面への図示

さて、1) 2) で導出した $i-p$ 平面上の $\dot{p}=0$ 曲線、 $\dot{l}=0$ 線および(3-8)式の $i-p$ 直線の交点を、 $w-p$ 平面に図示していこう。これにより、賃金の運動方程式(3-3)式を除いた(3-1)(3-2)(3-4)を踏まえた位相図が書ける。以下では、図4と同じ要領で、賃金 w の変化によって $\dot{p}=0$ 、 $\dot{l}=0$ 線がシフトしたときの(3-8)式との交点の変化を $w-p$ 平面に図示していくことにする。まず、 $\dot{p}=0$ 線と(3-8)式の交点を $w-p$ 平面に描いていくと、 w が上昇したとき、 $i-p$ 平面における $\dot{p}=0$ 線は、実線→破線→点線の順番のように変化することになる（左図）。すると、(3-8)式との交点も順次変化していき、その交点である p を $w-p$ 平面に図示すると次のように書ける。

図8 $w-p$ 平面における利率の運動を含めた $\dot{p}=0$ 線の導出

左図の $\dot{p}=0$ 線は、 w が減少すると「逆くの字」が潰れていくので $w \rightarrow 0$ のとき下切片は必ずゼロとなる。³⁴⁾ 一方、上切片は、初期値と ϵ の値によって、正もしくはゼロとなる。図8の実線は、上切片が正のケースを表しており、灰色線は、上切片がゼロになるケースである。また、 i_0 、 ϵ が大きいときには、 $\dot{p}=0$ 線と (3-8) 式は交点を持たなくなり、 $\dot{p}=0$ 線は消失することもあり得る。価格 p は、 $w-p$ 平面において $\dot{p}=0$ 線の内側で上昇し、外側で減少するよう運動する。

次に、 $i-p$ 平面でみた価格 p の安定性の問題は、 $w-p$ 平面においてはどのように表現されているのか確認していこう。 $w-p$ 平面の $\dot{p}=0$ 線の傾きをみると、

$$\frac{dp}{dw} = \frac{(g'-s)n/p}{(g'-s)wn/p^2 - g'\epsilon} = \frac{(g'-s)n/p}{(g'-s)\epsilon_0 - g'\epsilon} \quad (4-2)$$

となっている。よって、 $g' < s$ の領域では、 $\dot{p}=0$ 線の傾きは常に正であり ($\dot{p}=0$ 線上部)、 $g' = s$ のときゼロとなる。また、 $g' > s$ のときは場合分けが生じ、 $\epsilon > \epsilon_1$ のとき $\dot{p}=0$ 線の傾きは負、 $\epsilon < \epsilon_1$ のとき正となる。³⁵⁾ 価格の安定条件は、 $g' < s$ もしくは、 $g' > s$ かつ $\epsilon > \epsilon_1$ であるので、図8右図で言うところ、 ϵ_1 を境にして上部が安定 (実線)、下部が不安定 (破線) となっていることが解る。³⁶⁾ したがって、定常解近傍での ϵ_1 と ϵ の大小により、安定性が変化したのは、価格の安定性についての条件であったことが解る。

同様に $\dot{l}=0$ 線と (3-8) 式の直線の交点を $w-p$ 平面に描いていこう。賃金が上昇すると $\dot{l}=0$ 線も傾きを変えながら実線→破線→点線の順にシフトしていく。そのときの (3-8) 式との交点 p の変化を $w-p$ 平面に書くと次のようになる。

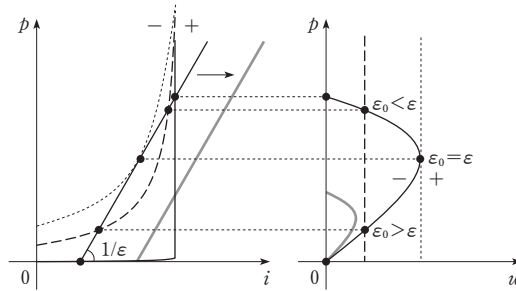
$\dot{l}=0$ 線は w が上昇するにつれて図のように変化していく。よって、 $w \rightarrow 0$ となると、 $\dot{l}=0$ 線の下切片も必ずゼロとなる。一方、上切片は、解が存在する限り必ず正である。また、 i_0 、 ϵ が大きいと、 $\dot{l}=0$ 線と (3-8) 式は交点を持たなくなる場合が考えられる。 l の運動は、 $\dot{l}=0$ 線の内側で減少し、外側で上昇することになる。 $w-p$ 平面の $\dot{l}=0$ 線の傾きは、

$$\frac{dp}{dw} = \frac{n/p}{wn/p^2 - \epsilon} = \frac{n/p}{\epsilon_0 - \epsilon} \quad (4-3)$$

であり、 $\epsilon < \epsilon_0$ のときに傾きは負、 $\epsilon > \epsilon_0$ のとき傾きは正となる。³⁷⁾ よって、定常解近傍の ϵ_0 と ϵ の大小による条件は、資本-労働供給比率の運動に対応する条件であったことが解る。

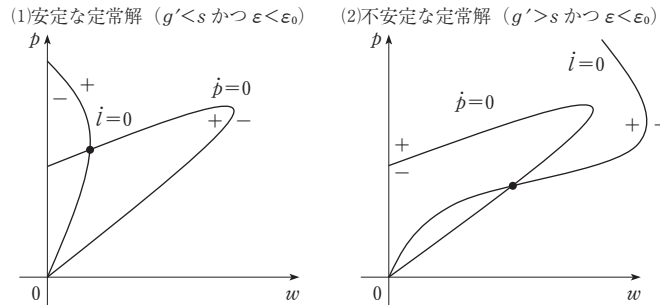
ここまでの手順により、(3-3) 式を除いて、モデルの運動を $w-p$ 平面に図示できたことになる。よって、導出した $\dot{p}=0$ 、 $\dot{l}=0$ 線を $w-p$ 平面上で重ね合わせた交点は、(3-3) 式を除いた体系の解である。 $\dot{p}=0$ 、 $\dot{l}=0$ の交点は、(3-1) (3-4) (3-8) 式の均衡を意味しているので、 p^* 、 w^* は一意に決まる。よって、交点は必ず1つだけ定まる。この3式の定常解が安定な範囲にあ

図9 $w-p$ 平面における利子率の運動を含めた $i=0$ 線の導出



るのは、1-3-1節2) より、 $g' < s$ かつ $\epsilon < \epsilon_0$ 、 $g' > s$ かつ $\epsilon > \epsilon_0$ 、の場合である。以下では、安定な定常解となるケースと不安定な定常解となるケースをそれぞれとりあげ、いずれの場合もカタストロフが発生し得ることを明らかにする。

図10 $w-p$ 平面における $\dot{p}=0$ 、 $i=0$ 線の交点



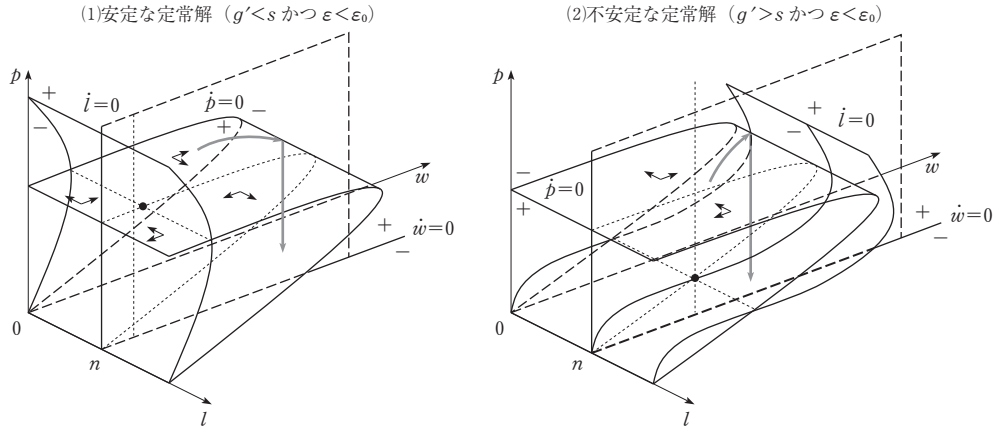
両曲線の切片の位置関係が図10のようになり、 $\dot{p}=0$ 、 $i=0$ 線が、上図のような交わり方をするのは以下の理由による。まず、 $w=0$ かつ $p>0$ のとき、実質賃金率がゼロとなり、 $i=0$ 線は $\nu=g(\sigma-i)$ 、 $\dot{p}=0$ 線は $g(\sigma-i)=s\sigma$ となる。1-3-1節の(1)より、 $\nu < s\sigma$ を前提しているの、両曲線で決まる利子率は $i^{i=0} > i^{p=0}$ であり、よって、(3-8) 式から必ず $p^{i=0} > p^{p=0}$ となる。これが、 p が正となる上切片の位置関係を示していることになる。次に、 $w=0$ かつ $p=0$ となり、 w/p がある定数になることで $i=0$ および $\dot{p}=0$ が成立しているケースが考えられる。これは、 $p=0$ なので、必然的に下切片に対応していることになる。

(4) $p-w-l$ 3次元図とカタストロフ

最後に、 $\dot{w}=0$ を考慮すれば、宇野・伊藤「恐慌」モデル (3-1) ~ (3-4) 式を完全に図示したことになる。この3次元図において、財市場の調整が十分速いとするならば、カタストロフが発生するケースがあることは明らかである。(3-3) 式から $\dot{w}=0$ となるのは、 $l=n$ のときである。 n は技術定数であるから、 $\dot{w}=0$ 線は $l-w$ 平面において w 軸と平行の直線として簡単に書ける。この直線を挟んで、 w の運動は、 $l < n$ のとき上昇し、 $l > n$ のとき減少する。これと、図10の結果と合わせると、定常解が安定な場合の $p-w-l$ 3次元図は次のように描ける。

運動停止点を表す3平面の交点が、宇野・伊藤モデルの定常解となる。いま、財市場の調整が十分速いと想定すると、 $\dot{p}=0$ 平面の安定均衡部分である上部で w 、 l が運動することになる。³⁸⁾ w 、 l はそれぞれのケースで矢印の方向に運動することになる。よって、 $l < n$ の領域で賃金率が上昇

図11 財市場の調整が早いケースにおけるカストロフ



すると、(1)(2)のケースともに、 $\dot{p}=0$ 平面から滑り落ちて価格がゼロまで下落するケースがあり得る (灰色線)。これが、宇野・伊藤「恐慌」モデルにおけるカストロフ、つまり、恐慌と解釈できる現象が発生するメカニズムである³⁹⁾。したがって、置塩の、宇野体系は恐慌が生じないモデルである、という批判は妥当しない。

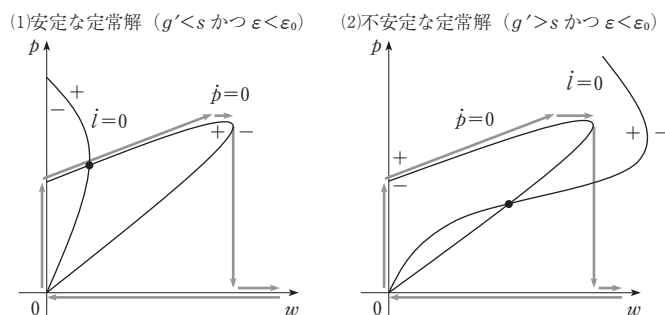
続いて、好況末期から恐慌までの現象に相当する、カストロフ発生の前後の賃金率、価格、利潤率、利子率、の運動について明らかにしていこう。図12をみると、(1)(2)ともカストロフが発生する前では、失業率が減少していき貨幣賃金率が上昇する状況からはじまる。このとき、価格は、図8より、上昇しており、(3-8)式から利子率は価格と同方向に動くので、利子率も同じく上昇していることが解る。ところで、財市場を均衡させる利潤率と利子率の運動の方向は、次のように書ける⁴⁰⁾。

$$\frac{di}{dr} = \frac{g' - s}{g'} \tag{4-4}$$

したがって、 $g' < s$ の領域においては、利子率が上昇したとき、利潤率が低下することで財市場は均衡する。よって、このとき、価格は賃金率ほど上昇しておらず、利潤率は低下しつつあることになる。賃金の上昇が進んでいくと、 $g' = s$ の点を越えて $g' > s$ の領域に入る (図8)。価格、利子率は、ともに下落しはじめるので、利潤率は急激に低下することになる。 $g' > s$ の領域では(4-4)式により、利子率減少にもかかわらず、利潤率がそれ以上に下落することで投資が減少し、財市場はより低い水準で均衡する。しかし、さらに賃金が $\varepsilon = \varepsilon_1$ の点を越えて上昇するや否や、価格・利子率の運動によって均衡を達成することは不可能となり、財市場は超過供給状態に陥る (図6で言う、賃金上昇により、 $\dot{p}=0$ 線が上にシフトし、安定均衡点が消失するケース)。このとき、財市場の調整が労働市場より十分速ければ、賃金が不変の下で価格がゼロまで下落することになり、利潤率はゼロとなる。また、利子率についても、体系がとり得る最低水準まで落ち込む (図6)。これが、宇野・伊藤モデルにおけるカストロフ前後の運動である。また、その後のモデルの運動については、図11の3次元図と合わせて $w-p$ 平面から見ると解りやすい (図12)。

図12において、カストロフ後の状態は $\dot{p}=0$ 上部から急落した価格ゼロの点にあたる。この点は、図11でみると、両ケースとも賃金が未だ上昇する領域にある。しかし、投資がゼロとなり、

図12 カタストロフ後の運動



労働人口が一定率で上昇しているため、資本-労働供給比率 l は上昇し続け、いずれ労働供給が労働需要を上回り $l > n$ となる。すると、(3-3) 式から賃金率はやがて減少しはじめ、時間が十分に経つと賃金率もゼロまで行き着くことになり、賃金、価格、はともにゼロとなる（図12）。よって、このモデルの運動は、全く摂動がなければ、原点において停止する。しかし、小さな摂動により、原点から上方に少し運動がずれると、価格が上昇する領域に入るため、運動が再び開始され、 $\dot{p}=0$ の上切片に至る。すると、利潤率が正となり投資が再開されるので、失業率が減少し、 $\dot{p}=0$ 平面上で再び賃金上昇のプロセスがはじまることになる。以上は、それぞれ、不況、好況に相当する局面と捉えることができ、宇野・伊藤「恐慌」モデルでは、カタストロフを含めて循環運動を続けるケースがあることになる。以上のプロセスは、賃金が価格以上に上昇することにより、利潤率が低下し、恐慌と解釈できる不連続な運動が発生するというものであり、宇野恐慌論の主要プロセスと合致している。また、賃金、価格、利潤率、利子率の運動についても、宇野の叙述といくつかの共通点を見出すことができる⁴¹⁾

注

- 1) 置塩・伊藤 (1987), 122-154項
- 2) 置塩・伊藤 (1987), 54項
- 3) 置塩・伊藤 (1987), 78-80項, 126項
- 4) 置塩・伊藤 (1987), 52項, 77項
- 5) Becker, Gary and Baumol, William J. (1952), pp. 356-357
- 6) Lange, Oskar (1939), pp. 172-173
- 7) Goodwin, R. M. (1967)
- 8) 置塩・伊藤 (1987), 66-67項
- 9) 「資本の過剰蓄積にともなう労賃の上昇が利潤率の低落のみならず、貸付資本の需給の逼迫をつうじ利子率の上昇をも招き、利潤率と利子率との衝突をつうじ急性的恐慌を生ずる論理を明らかにしようとしていた。…それは信用の逼迫、崩壊をつうじ、置塩の重視する投資需要の収縮が機構的に強制され、商品市場の需給ギャップが累積的に急激にひろがる自体が生ずる必然性を原理的に解明しようとするものにほかならない。」置塩・伊藤前掲書, 147項
- 10) 置塩・伊藤 (1987), 124項
- 11) 置塩・伊藤 (1987), 148項
- 12) 「マルクスは、セーと異なり、市場の売りと買いの一致を同義反復的に想定していたのではなく、さきに述べたように、市場における各商品生産物のたえざる需給の不一致が、生産過程を通じて調整されてゆくところに価値法則の作用をみていた。」置塩・伊藤 (1987), 70項

- 13) Baumol, William J. (1999), pp.201-202
- 14) Patinkin, D. (1956), pp.340-341. patinkin 自身は、これをセイ恒等式 (Say's Identity) と呼んでいるが、本稿では Baumol 前掲書にしたがってセイ法則概念を定義している。
- 15) 宇野は獲得した利潤について、「資本家の個人的消費資金と蓄積資金とに分割せられる」(宇野, 1981年, 63頁)と述べた後、「…固定資本の償却資金乃至蓄積資金等がかかる信用の拡大に利用せられる。」(宇野, 1981年, 72頁)と言っており、資本家の積立資金が貸付資金として利用されると述べている。
- 16) ここで、(2-12) 式が導入されているということは、価格の運動に応じて利潤率が変化し、財市場が均衡化するという関係も含まれており、前節より体系が拡張されている点に留意されたい。しかし、セイ方程式体系であることには違いがなく、セイ方程式体系の中で財市場の不均衡が累積する可能性があるモデルになっている。
- 17) 伊藤は価格の調整機能について、「無政府的な生産にともなう需給の不均衡は、市場における価格の上方または下方の運動を介して、さしあたり短期的には生産諸条件の変化を生じないまま、その原因を打消す方向に生産の流動的な調整をもたらすかぎり、安定的なフィードバックの作用を成り立たせている。」と、述べている。置塩・伊藤前掲書, 95-96項
- 18) 置塩・伊藤 (1987), 143項
- 19) この手法は、松尾匡 (1996), 13頁に拠っている。
- 20) 最大成長率は実質賃金率がゼロであるので、 $g(\sigma-i)$ である。他方、このとき、貯蓄は $s\sigma$ となっており、財市場均衡が成立しているとする、 $g(\sigma-i)=s\sigma$ となる。
- 21) 3変数のルース・フルヴィッツの安定条件は、 $f(\lambda)=\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$ とすると、 $a_2>0$, $a_1>0$, $a_0>0$, $a_2a_1-a_0>0$ である。
- 22) 1-4節の図8～図11を考慮すると、これは、 $\dot{p}=0$, $\dot{i}=0$ 平面が $g'_s=s$ の点で接する極めて偶然的なケースであることが解る。
- 23) 【数学注1】参照。
- 24) 【数学注2】参照。
- 25) ϵ_0 は初期値 p_0 , i_0 に依存しているが、同一軌道上の任意の点を初期値にとっても ϵ_0 は不変である。詳細は【数学注3】参照。
- 26) 【数学注4】参照。
- 27) (3-10) (3-17) (3-18) 式を比較すると、 $g'_s < s$ のとき、 $\epsilon_s < \epsilon_1 < \epsilon_0$ であることが解る。
- 28) 浅田統一朗 (1997), 135-136頁
- 29) $f(\lambda)=\lambda^3-a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$ とすると $a_1>0$, $a_2a_1-a_0=0$ 。
- 30) 【数学注5】参照。
- 31) カタストロフとは、周期的な秩序だった現象の中から不意に発生する無秩序な現象を意味している。V.I. アーノルド著；蟹江幸博訳 (1985), 2-3頁参照。
- 32) $g(r(w/p)-i)=sr(w/p)$ を、 p , i で全微分すると、 $g'(dr/dp)\cdot dp - g'di = s(dr/dp)\cdot dp$ となる。これを整理すればよい。また、 ϵ_1 は、均衡近傍では定数になるが (3-18) 式、大域的には $\epsilon_1 = ((g'-s)wn)/g'p^2$ である。
- 33) $r(p)=i+\phi$ を p , i 全微分すると、 $(dr/dp)\cdot dp = di$ となるので、これを整理すればよい。また、均衡近傍では ϵ_0 定数になるが (3-17) 式、大域的には $\epsilon_0 = (wn)/p^2$ である。
- 34) $w-p$ 平面における $\dot{p}=0$, $\dot{i}=0$ 曲線の切片の詳細については後述する。
- 35) $g(r(w/p)-i(p))=sr(w/p)$ を、 p , w で全微分すると、 $g'(dr/dp)\cdot dp + g'(dr/dw)\cdot dw - g'(di/dp)\cdot dp = s(dr/dp)\cdot dp$ となる。これを整理すればよい。
- 36) ϵ_1 についても均衡近傍では定数になるが (3-18) 式、大域的には $\epsilon_1 = ((g'-s)wn)/g'p^2$ である。
- 37) $v=g(r(w/p)-i(p))$ を、 p , w で全微分すると、 $0=g'(dr/dp)\cdot dp + g'(dr/dw)\cdot dw - g'(di/dp)\cdot dp$ となる。これを整理すればよい。

- 38) これは、価格、利子率両方の運動が十分早く財市場が均衡する、という意味であり、両速度の比はここでは問題ではない。
- 39) カタストロフの数学証明は【数学注6】参照。
- 40) $g(r-i)=sr$ を、 r, i で全微分すると、 $g' \cdot dr - g' \cdot di = s \cdot dr$ となる。これを整理すればよい。
- 41) 宇野 (1981), 62-106頁。繰り返しになるが、このモデルでは財市場と債券市場がともに超過供給となるようなマルクスの言う恐慌は生じない。

【数学注1】

$$\begin{aligned} & \varphi/n \cdot (A_{12}A_{31} - A_{11}A_{32}) \\ &= \frac{\varphi}{w_*} \left[\alpha g' \cdot (g' \cdot -s) \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \left\{ \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \frac{1}{p_*} - \frac{\beta}{\alpha} \right\} - \alpha g' \cdot (g' \cdot -s) \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right)^2 \frac{1}{p_*} + \beta g' \cdot (g' \cdot -s) \right] \\ &= \frac{\varphi}{w_*} \left\{ -\beta g' \cdot (g' \cdot -s) \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) + \beta g'^2 \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \right\} = \varphi \beta g' \cdot s \frac{1}{w_*} \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) > 0 \end{aligned}$$

【数学注2】

$$\textcircled{4} - \frac{\varphi}{n} A_{12}A_{31} = \varphi g' \cdot \alpha \frac{1}{w_*} (g' \cdot -s) \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \left[\varepsilon - \frac{1}{p_*(\varepsilon)} \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \right]$$

したがって、 $\varepsilon = \beta/\alpha$ の値が次のとき、大括弧 [] 内の正負が逆転する。

$$\varepsilon = \frac{1}{p_*(\varepsilon)} \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right)$$

しかし、 $p_*(\varepsilon)$ は具体的には、(3-8) 式より $p_* = 1/\varepsilon \cdot (i_* - i_0) + p_0$ である。よって、これも上式に代入した上で、 ε について整理し、境界点を定めなければならない。代入して整理すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \frac{\varepsilon}{(i_* - i_0) + \varepsilon p_0} \Rightarrow \varepsilon p_0 + (i_* - i_0) = \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \\ \varepsilon_0 &= \frac{1}{p_0} \left[\left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) - (i_* - i_0) \right] \end{aligned}$$

【数学注3】

ε_0 は同一軌道上の任意の点を初期値にとっても不変である。初期値が与えられると p, i は次の方程式を満たすように運動する。 $p = 1/\varepsilon(i - i_0) + p_0$ いま、 i_0 から出発し、 t だけ時間が経過して $i_t = i_0 + \Delta i$ となったとする。このとき p_t は、

$$p_t = 1/\varepsilon \{ (i_0 + \Delta i) - i_0 \} + p_0 = 1/\varepsilon \Delta i + p_0$$

である。 p_0, i_0 と同一軌道上の、この p_t, i_t を初期値として、(3-17) 式に代入し ε_t について解くと、

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{1}{p_t} \left[\left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) - (i - i_t) \right] \varepsilon_t \\ \left(\frac{1}{\varepsilon_t} \Delta i + p_0 \right) \varepsilon_t &= \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) - (i - (i_0 + \Delta i)) \Rightarrow \varepsilon_t = \frac{1}{p_0} \left[\left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) - (i - i_0) \right] \end{aligned}$$

となる。 $\varepsilon_t = \varepsilon_0$ となるので、同一軌道上の任意の点を初期値にとっても境界点是不変である。

【数学注4】

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{p_*(\varepsilon) g' \cdot} (g' \cdot -s) \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \\ \varepsilon &= \frac{1}{\{ (i_* - i_0) + \varepsilon p_0 \} g' \cdot} (g' \cdot -s) \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \Rightarrow \{ (i_* - i_0) + \varepsilon p_0 \} g' \cdot = (g' \cdot -s) \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{p_0} \left[\frac{1}{g' \cdot} (g' \cdot -s) \left(\sigma - \frac{\nu}{s} \right) - (i_* - i_0) \right] \end{aligned}$$

【数学注5】

いま、特性方程式 $f(\lambda) = \lambda^3 - a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ の解が、複素根をもつ範囲にあり、 $\lambda_1 = h_1 + h_2 i$ 、 $\lambda_2 = h_1 - h_2 i$ 、 λ_3 であったとしよう。すると、

$$a_1 a_2 - a_0 = -(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_4) = -2h_1(\lambda_3^2 + 2h_1\lambda_3 + h_1^2 + h_2^2)$$

となる。これを ε で微分すれば、

$$\frac{d(a_2 a_1 - a_0)}{d\varepsilon} = -2 \left[\frac{\partial h_1}{\partial \varepsilon} (\lambda_3^2 + 2h_1\lambda_3 + h_1^2 + h_2^2) + h_1 \frac{\partial (\lambda_3^2 + 2h_1\lambda_3 + h_1^2 + h_2^2)}{\partial \varepsilon} \right]$$

となる。これに、 $h_1=0$, $h_2=h$ を代入すると、

$$\left. \frac{d(a_2 a_1 - a_0)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} = -2(\lambda_3^2 + h^2) \left(\left. \frac{\partial h_1}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} \right)$$

が得られる。故に、

$$\left. \frac{d(a_2 a_1 - a_0)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} \neq 0 \text{ であれば, } \left. \frac{d(\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} \neq 0 \text{ となる。}$$

【数学注6】

賃金 w が変化したときの価格 p の運動についてカタストロフが発生していることを、トムの定理を用いて証明する。野口 (1986), 35-38頁によると、コントロール変数が1つだけの場合、ポテンシャル関数 $V(p; w)$ が、トムの言う折り目のカタストロフの関数形に変換できることを証明すればよい。ここで、 $V(p; w)$ は、安定な定常解 p_* において $V'(p_*)=0$ かつ $V''(p_*)>0$ となる関数でなければならない。これは、 $V'=-\dot{p}$ とおくと、

$$V'(p_*) = -\dot{p} = \alpha [g(r(p_*)) - sr(p_*)] = 0$$

$$V''(p_*) = - \left. \frac{d\dot{p}}{dp} \right|_{p=p_*} = -\alpha \left[(g'(p_*) - s) \frac{wn}{p_*^2} - g'(p_*) \varepsilon \right] > 0$$

となり、上述の性質を満たしている (安定な定常解では $g'>s$ のとき $\varepsilon > \varepsilon_1$ である)。また、この体系の特異点は、図6をから、 $\dot{p}=0$ かつ $\varepsilon=\varepsilon_1$ 、となる点で決まる。したがって、

$$g(r(p) - i) = sr(p), \quad \varepsilon = \frac{(g'(p) - s) wn}{g'(p) p^2}$$

特異点は、2式を満たす p , w の組み合わせであり、これを p_* , w_* と表す。ポテンシャル関数 $V(p; w)$ は、 p_* , w_* を原点とするように座標変換すると、 $\bar{V}(p-p_*; w-w_*) = \bar{V}(0, 0)$ とすることができるので、以下、この \bar{V} がトムの折り目のカタストロフと同値になることを証明する。 \dot{p} は、特異点 p_* でテーラー展開すると、

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \alpha \left[(g'_* - sr_*) + \left\{ (g'_* - s) \frac{wn}{p_*^2} - g'_* \varepsilon \right\} (p - p_*) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left\{ -2(g'_* - s) \frac{wn}{p_*^2} - g'' \frac{wn}{p_*^2} \left(\frac{wn}{p_*^2} - \varepsilon \right) \right\} (p - p_*)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \left\{ 6(g'_* - s) \frac{wn}{p_*^2} + 2g'' \frac{wn}{p_*^2} \left(\varepsilon - 3 \frac{wn}{p_*^2} \right) + g''' \frac{w^2 n^2}{p_*^4} \left(\frac{wn}{p_*^2} - \varepsilon \right) \right\} (p - p_*)^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

となる。ここで1次の項の $\{ \}$ 内はゼロとなり、消えることになる。さらに、 \dot{p} を積分すると、 \bar{V} は次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{V}(p-p_*; w-w_*) &= - \int \dot{p} dp \\ &= -\alpha \left[(g'_* - sr_*) (p - p_*) + \frac{1}{6} \left\{ -2(g'_* - s) \frac{wn}{p_*^2} - g'' \frac{wn}{p_*^2} \left(\frac{wn}{p_*^2} - \varepsilon \right) \right\} (p - p_*)^3 + O^4 \right] \end{aligned}$$

O^4 は4次以上の項を示しており、これは十分小さいと考える。また、右辺第2項は定数なので、 $\gamma=1/6\{$ と置き換えて $1/\gamma$ でくくると、 \bar{V} は以下のように近似することができる。

$$\bar{V} \doteq - \frac{\alpha}{\gamma} [\gamma(g'_* - sr_*) (p - p_*) + (p - p_*)^3]$$

$$x = p - p_*, \quad u = (g'_* - sr_*)/\gamma \text{ とすると,}$$

$$\bar{V} \equiv -\frac{\alpha}{\gamma}(x^3 + ux)$$

となり、これは、トポロジー的にトムの折り目カタストロフ関数 $F = x^3 + ux$ （野口，1986，26頁）と相同である。

参考文献

- Baumol, William J. (1999), "Retrospectives: Say's Law", *Journal of Economic Perspectives*, 13, 195-204
- Becker, Gray and Baumol, William J. (1952), "The Classical monetary theory: the outcome of the discussion", *Economica*, 19, 355-76
- Goodwin, R. M. (1967), "A Growth Cycle", in *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, ed. by Feinstein, C. H., Cambridge Univ, 54-57 (水田他訳 (1969) 『社会主義・資本主義と経済成長』筑摩書房)
- Lange, Oskar (1939), "REPORT OF THE DETROIT MEETING, DECEMBER 27-30, 1938", *Economica*, 17, 172-173
- Patinkin, Don. (1956), *Money, Interest and Price*, Evanston, Illinois
- K・マルクス；大内兵衛監訳 (1968) 『資本論』第1巻 (第2分冊)，大月書店
- V. I. アーノルド著；蟹江幸博訳 (1985) 『カタストロフ理論』現代数学社
- 浅田統一朗 (1997) 『成長と循環のマクロ動学』日本経済評論社
- 宇野弘蔵 (1981) 『恐慌論 (第22版)』岩波書店
- 置塩信雄・伊藤誠 (1987) 『経済理論と現代資本主義』岩波書店
- 野口広 (1986) 『カタストロフィー』サイエンス社