

博士論文

効果的な展開・収納を実現する 「折り」「切り」構造のデザインとメカニクス

(Mechanics of "Ori-kirigami" designs
for efficient folding and depolyment)

2022年3月

立命館大学大学院理工学研究科
基礎理工学専攻博士課程後期課程

米田 大樹

立命館大学審査博士論文

効果的な展開・収納を実現する
「折り」「切り」構造のデザインとメカニクス
(Mechanics of "Ori-kirigami" designs
for efficient folding and depolyment)

2022 年 3 月
March 2022

立命館大学大学院理工学研究科
基礎理工学専攻博士課程後期課程

Doctoral Program in Advanced Mathematics and Physics
Graduate School of Science and Engineering
Ritsumeikan University

米田 大樹
YONEDA Taiju

研究指導教員：和田 浩史 教授
Supervisor : Professor WADA Hirofumi

概要

本論文では、折り紙や切り紙ベースの展開型構造に注目し、具体的なモデルに対してその基本的な作動メカニズムを明らかにした研究結果について述べる。本研究は将来的に、最適設計されたシート弾性構造を人工システムで使用方法を提供することにつながると期待される。この数十年の間に、うすい構造の展開収納に関する研究は物理学において活発な研究分野となった。その中でも昆虫の翅や植物の花弁など、有限の厚さと材料の弾性を有するうすいシート構造の剛性や弾性についての理解が飛躍的に進展してきた。弾性のあるシートを折ったり切ったりして、特定の構造を持たせると、変形と弾性力が密接に相互作用することにより、展開収納を可能にする機能を創発する。この機能を得るための最小の構造が何なのか、幾何学と力学の関係を、定量的に予想する普遍的な枠組みを構築することが、学問的には大きな目標である。

本論文では、特定の機能を持つ2つの構造に注目し、定量的な実験と有限要素法シミュレーションを組み合わせ、その物理学的特性を詳細にわたって明らかにした。前半では、回転と並進の運動をカップリングさせる紙ばねという、身近で子どもにも人気のある折り紙遊戯に焦点を当てた。紙ばねは、2本の細長い紙をじゃばらで折り込んだだけの単純な構造であるにも関わらず、動かすとばねの伸縮とねじれに強いカップリング機能が生じる。本研究では、紙ばねの非線形な弾性力と、ねじれが生じる原因となる構造、そして1枚のシートのみ弾性を詳細に調べ、それらの関係性を明らかにした。その結果、2本の紙が互いの変形を制約し合うインターロッキング構造によって、うすいシートが幾何学的な変形制約を受け、展開時に局所的な曲げと面内圧縮を余儀なくされたことで、構造の剛性が強化されることを示した。この構造デザインの設計によって、構造の両端にかかる力とモーメントを制御するだけで、回転運動と並進運動の可逆的な変換が可能になる。

論文の後半では、平面シートから三次元構造を形成する、折り紙と切り紙が融合した RES (Rotational Erection System) という設計手法を取り上げた。折り紙と切り紙を組み合わせることで、折り紙が持たない、横方向の系のサイズを維持したまま縦方向に立体化できる機能と、切り紙には実現が難しい、形状の多重安定性を同時に発現させている。ここでは、有限要素法解析と物理実験を組み合わせることで、3回対称 RES の機械的特性を明らかにした。折り目と

切り目の幾何的パターンにもとづくと、この系は剛体折りで展開できない。しかし、面の弾性を伴った曲げ変形によって、エネルギー的に離散した2つの形状を繋ぐ物理的な経路ができていることを実証できた。これによって、RESの弾性は、スナップスルー変形で立体化することを可能にし、RESを双安定の機能が生まれていることがわかった。双安定のエネルギーバリアは、構造のサイズには依存せず、曲げ変形が最も顕著に起こる部位のアスペクト比にのみ依存することも示した。また立ち上がった状態のRESは、その独特なセルフロックの機構によって剛性を発揮し、強い耐荷重の機能も有することを示した。

以上のように、本論文では、折り紙および切り紙の発想にもとづくうすい構造体において、シンプルなデザインを持つ二つの具体例に注目し、その物理的特性を細部にわたり、また十分に定量的に明らかにした。これらの結果は、実用的要求に応えるより複雑な構造を発想するさいの概念的な基盤となり、将来的に折り紙・切り紙ベースの構造による機能をプログラムできるようなデザインを可能にするという点で重要である。

目次

| | | |
|--------------|-------------------------------------|-----------|
| 第 1 章 | はじめに | 6 |
| 1.1 | 研究目標 | 6 |
| 1.1.1 | うすいことに起因する構造利点 | 6 |
| 1.1.2 | うすい構造の遍在 | 7 |
| 1.2 | 研究背景 | 8 |
| 1.2.1 | 剛体折り紙 | 8 |
| 1.2.2 | 切り紙 | 10 |
| 1.3 | 弾性面を活用したデザイン | 10 |
| 1.3.1 | 生物の例 | 10 |
| 1.3.2 | 人工物の例 | 14 |
| 1.4 | うすい材料の弾性力学理論 | 16 |
| 1.4.1 | 板の変形エネルギー：面内方向の伸縮と面外方向の曲げ | 18 |
| 1.4.2 | 座屈 | 18 |
| 1.5 | 注目する 2 つの構造：紙ばねと RES | 22 |
| 第 2 章 | 紙ばね | 25 |
| 2.1 | 概要 | 25 |
| 2.2 | モデル：正方形紙ばねの構造 | 25 |
| 2.3 | 実験と数値シミュレーションの方法 | 28 |
| 2.3.1 | 物理模型の作成方法 | 28 |
| 2.3.2 | 紙ばねの伸びに対するねじれの計測 | 29 |
| 2.3.3 | 紙ばねの伸びに対する復元力の計測 | 30 |
| 2.3.4 | シート 1 枚の曲げ弾性力の計測 | 32 |
| 2.3.5 | 三次元形状計測 | 33 |
| 2.3.6 | 有限要素法シミュレーション | 36 |

| | | |
|--------------|--|-----------|
| 2.4 | 結果 | 38 |
| 2.4.1 | 伸張した紙ばねの三次元形状計測とシミュレーションの形状計算 | 38 |
| 2.4.2 | 伸びに対するねじれ | 39 |
| 2.4.3 | 伸びに対する復元力 | 40 |
| 2.4.4 | シート 1 枚の曲げ弾性力 | 40 |
| 2.5 | 考察 | 41 |
| 2.5.1 | ねじれの幾何学 | 41 |
| 2.5.2 | 復元力とシート厚 | 44 |
| 2.5.3 | 合体紙ばねの応用 | 47 |
| 2.6 | まとめ | 48 |
| 第 3 章 | Rotational Erection System (RES) | 50 |
| 3.1 | 概要 | 50 |
| 3.2 | モデル：3 回対称 RES の構造 | 51 |
| 3.2.1 | 剛体面 RES の駆動自由度 | 53 |
| 3.3 | 実験と数値シミュレーションの方法 | 57 |
| 3.3.1 | 物理模型の作成方法 | 57 |
| 3.3.2 | RES の回転変形に対するトルクの計測 | 59 |
| 3.3.3 | 平坦状態の RES の伸長に対する力の計測 | 61 |
| 3.3.4 | 立ち上がった状態の RES の垂直耐荷重の計測 | 63 |
| 3.3.5 | 有限要素法シミュレーション | 64 |
| 3.4 | 結果 | 65 |
| 3.4.1 | 回転変形に対するトルク | 65 |
| 3.4.2 | 伸長に対する力 | 66 |
| 3.4.3 | 回転変形に対する高さ | 67 |
| 3.4.4 | 立ち上がった状態の垂直耐荷重 | 67 |
| 3.5 | 考察 | 68 |
| 3.5.1 | トルクのピークと臨界座屈 | 68 |
| 3.5.2 | 初期状態 ($\theta = 0^\circ$) の微小ひずみを与える影響 | 69 |
| 3.5.3 | 高さは中間状態で最大になる | 71 |
| 3.5.4 | トルクのする仕事と駆動エネルギー障壁 | 72 |
| 3.5.5 | 立ち上がった状態での耐荷重性とセルフロック機能 | 73 |
| 3.6 | まとめ | 75 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 第 4 章 | まとめ | 76 |
| 付録 A | 弾性力学の理論 | 78 |
| A.1 | 三次元弾性固体 | 78 |
| A.2 | 重力たわみによる曲げ剛性の測定方法 | 90 |
| 付録 B | 三次元空間座標の計測 | 95 |
| B.1 | カメラの基本構造 | 95 |
| 付録 C | 使用した機器の設定方法 | 100 |
| C.1 | カッティングプロッター Silhouette CAMEO 3 のカット設定例 | 100 |
| C.2 | 有限要素法シミュレーションソフト ABAQUS/CAE の設定手順 | 101 |
| 付録 D | シリコンによる形成 | 115 |
| D.1 | 硬化シリコン樹脂のヤング率測定 | 115 |
| D.2 | 硬化に関する性質 | 119 |
| 付録 E | 紙ばね 型紙 | 123 |
| | 謝辞 | 125 |
| | 参考文献 | 126 |
| | 発表論文リスト | 132 |

第1章

はじめに

1.1 研究目標

1.1.1 うすいことに起因する構造利点

本論文では、うすいシートに折り目や切り目などの構造を持たせることで創発する、展開と収納の特徴的な機能を、弾性力学の視点から述べる。うすい構造には、2つの大きな構造利点がある。まず材料コストが小さく、軽量であるにもかかわらず高い強度を付与できること。そして、折りたたんで大きな構造を展開収納できることである。これらは材料特性によるものではなく、幾何学的な特定のかたちにより発現する機能で、体積のある材料には決して真似できない性質を実現させる。例えば図 1.1(a) のように、体積のある物体が弾性変形する場合を考えると、フックの法則から応力とひずみは比例関係にあり、小さい力を加えても得られる変形は小さく留まる。そして、加えた力を除くと復元力で元の形状に戻るしかない。対比して、図 1.1(b) のように殻状のうすい構造を押すと、小さな力でも面が曲がって大きく変形してへこみ、更には元に戻らず反転した別のかたちでも、安定して形状維持できるなど、うすいことに起因する形状特性が発現しうる。

スケール不変性

うすい構造の力学特性がスケール不変性をもつことは、学問的に重要な性質である。つまり、重力や熱ゆらぎなどの外的要因を除けば、システムの大きさに依存せず普遍的に同一の力学法則で展開収納の駆動を説明することができる。これは非常に有用な性質で、構造を理解しやすいデスクトップスケールの力学模型で観察や計測すれば、その結果を細胞内のナノスケールから巨大建築のマクロスケールまで幅広く応用できることを意味する。

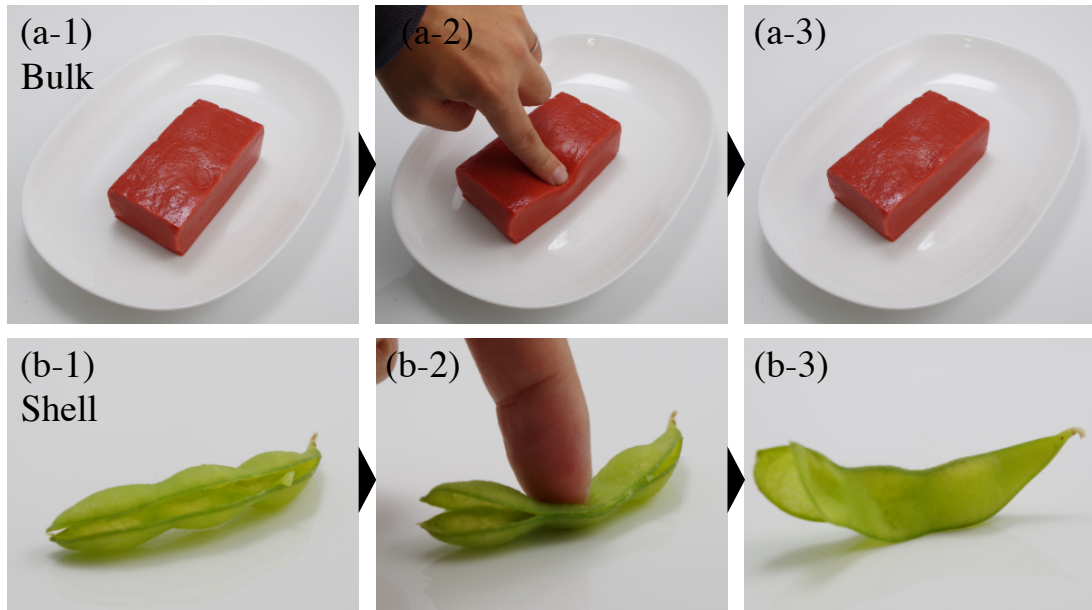


図 1.1 体積のある弾性体とうすい弾性体の例。(a) 赤こんにゃくは指で軽く押すと少し変形し、離すと復元力により最初のかたちに戻る。(b) 枝豆のさやは軽く押しただけでも形状の凹凸反転が起こり、弾性力の方向が変化して別のかたちでも安定する。

本研究でも、手のひらサイズでシンプルな構造をワーキングモデルとして、うすい構造のもつ物理的な特性を明らかにするアプローチをとっている。

1.1.2 うすい構造の遍在



図 1.2 どこにでも存在するうすい構造の例。

うすい構造は、われわれの身の回りのどこにでも存在し、生活にも深く関わっている。目を覚まして毛布をたたみ、服の袖に腕を通し、朝食で卵の殻を割り、歯ブラシで歯を磨き、口をマスクで覆い、子どもをおんぶ紐で背に巻き付け、靴の紐を結び、ティッシュペーパーを引き出し、雨の日は傘を展開し、乱暴に脱いだ靴下は表裏が反転する (図 1.2)。

そして 1.3 章で詳しく述べるが自然界に目を向けると、植物の花や葉の芽吹き、種子の散布、昆虫の羽化、動物の皮膚のしわなど、うすい構造に関連する現象の例は尽きない。うすい構造は普遍的に存在するため、人類の歴史においては様々なうすい構造の挙動に関わる知識の積み重ねがある。伝統作法、または遊戯や芸術として伝承されてきた紙の文化は、現在では折り紙の技術を筆頭にその構造利点が再認識された [1-3]。また 3D プリンターをはじめとした空間形成の技術が発達したことで、組み立てが難しいうすい構造も生産できる環境が整ったため、定量的にうすい構造の特性を理解し、新しい駆動概念をもつ機構が開発されるようになってきている [4-7]。そのようなうすい構造の変形幾何学と弾性力学の関係を定量的に予想する枠組みを構築することが、学問的な大目標となっている。

1.2 研究背景

1.2.1 剛体折り紙

折りたたみできるうすい構造は、芸術、服飾から、工学、建築、さらには生物学など、幅広い分野で研究されている [8-12]。うすい構造の展開に関する定量的な理解は、折り紙をキーワードにした先行研究が多い [13,14]。江戸時代に形状表現の遊戯として確立した折り紙は、平面に折り線を指定して変形させることで、複雑な三次元形状を作る技法である。折り紙の持つ幾何形状は、自然界では後述の植物や昆虫の翅(羽)など多くの生体構造にも見られる。現代では工学応用が研究されるようになり、ミウラ折り (1.2.1 章) [1] という面の展開技術が宇宙船のソーラーパネルの展開機構に応用されたことでも有名になるなど、学術的な観点でも様々なうすい構造の研究が進んでいる。中でも「剛体折紙」は大きな研究成果がある [15,16]。剛体折紙は理想化された折り紙の構造で、剛体平面がヒンジで接続された構造であり、面の厚みや駆動時の曲率変化は考えない。ヒンジとはドアの蝶番のような機構で、力は伝達するがトルクは伝えず、自由に面の角度を変えられる面上の線領域と定義される。剛体折紙は駆動の方向が特定された安定感のある形状で、幾何数学を使ってロボット [17] や建築 [11,18,19]、医療器具 [20] まで様々な技術応用例がある (図 1.3)。

しかしながら、現実のうすい構造は、折り目には弾性や塑性あり、面には厚みがあり、曲率も変化する。そのため、剛体折紙モデルでは、物理的な折り紙の剛性や弾性については説明することが難しい。そのため剛体折紙でモデル化した構造を製造する際は面の変形を極力排除した設計をしなければならない。また、例えば後述のミウラ折りの展開を考えると、駆動はすべてヒンジで生じるため力学がはたらかないので、現状の主要な技術体系

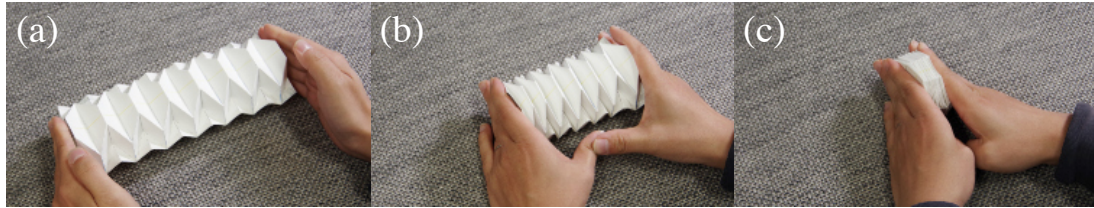


図 1.3 試作した Tachi-Miura polyhedron(TMP) 模型 [19, 21]。展開収納が可能で、荷重負荷に耐える強固な構造にもなる。宇宙構造物や、災害救助用の携帯構造、収納できる梱包材などのプログラムできる構造の一例。

では、駆動や展開のときに外力で引っ張らなければならないことが弱点である。つまり剛体折紙の構造とは別に駆動装置と伝達機構を付設しなければならないと、システム全体が複雑化、巨大化せざるを得ない。宇宙工学でロケットなど、搭載体積が制限される状況では大きな問題となる。その解決策として後述の 1.3.2 章でも説明するような、面の弾性変形もデザインの段階で積極的に取り入れた構造が注目を集めている。

ミウラ折り

剛体折紙の展開構造として、特によく知られている折り紙のパターンとして、ミウラ折りを説明する。三浦公亮が発案したことでミウラ折りと呼ばれるが、発表論文 [1] では“developable double corrugation (DDC) surface”：可展二重波型面とされている。その名の通り、面の縦横に折り目が連なっている構造で、縦横にじゃぼら折りされて、効率の高い面の収納が可能である。ミウラ折り機能の重要な点は、平面につけた折り線が角度の浅いジグザグのパターンであることである。このジグザグの角度によってミウラ折りの展開駆動の自由度 M が幾何的に $M = 1$ に制限されるため、縦に引っ張れば自発的に横にも展開できる二軸展開の機能を獲得している。この機能によって、駆動外力装置の付随が制限される人口衛星のソーラーパネルの展開収納などに利用される。同様の機能とジグザグパターンを拡張した研究は広くなされている。また、理想的な状況で紙を縦横に潰すと、ミウラ折りと同じパターンのしわが形成される。さらに 1.3.1 章で説明する昆虫の羽化における翅の展開にも同様のパターンが見られることから、人類だけがその知恵で発見した特殊性の高い構造では決してなく、自然選択によって発現する最適化された基本構造のひとつだといえる。

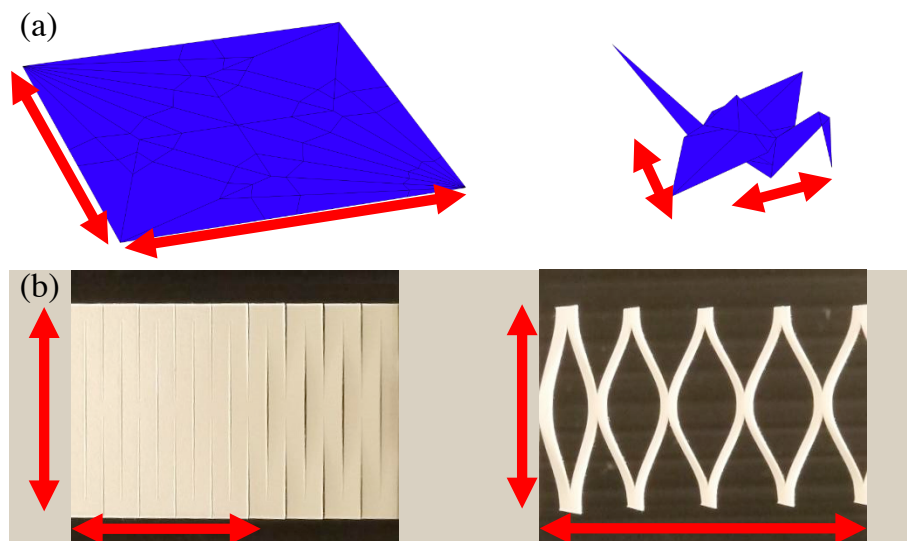


図 1.4 (a) 伝統的な折り紙遊戯の「折り鶴」は立体化するときには、平面から折りたたまれて小さくなる (Origami simulator [22] で作成)。一方で (b) 切り紙 [23] は切り目によってできた穴を広げて一方のサイズを維持または拡大させながら、面外方向に立体化する。

1.2.2 切り紙

切り紙は、折り紙とは別のアプローチの展開収納を実現する。平面切り紙は、特定の切り目パターンをシートに付与することで自由境界や穴を作ることによって、平面をさらに大きく展開させることができる。純粋な切り紙は図 1.4(b) のように面の曲げによって変形するため、外力を取り除けば復元力で元の平面に戻り、平面のみが安定に形状を維持できる単安定構造である。また、平面のシートを縦方向に立体化するとき、折紙構造であれば折りたたみにより、横方向には系のサイズが小さくなる (図 1.4(a)) が、切り紙は切り目によってできる空隙によって、横方向のサイズを維持したまま変形することができる。

1.3 弾性面を活用したデザイン

1.3.1 生物の例

1.2.1 章で述べたように、剛体折紙構造は幾何学で駆動を予測できるため強度や駆動の制御設計ができる。その反面、展開には外部の駆動装置に頼らなければならないことや、許容以上の外力で破壊されてしまう弱点がある。もし、うすい構造に弾性変形を取り入れ

れば、ばねのような瞬間的な駆動や、形状が崩れても構造は壊れず復元することなど、柔軟な折りたたみ構造を新しくデザインできると期待されている。このような面も変形するうすい構造の力学的な理解は、物理学と数学の組み合わせであり、まだ難しい研究分野であるが、自然に目を向けると弾性面を活用したデザインがいくつも見つかっている。多様で複雑な生体の構造から、その特徴を抽出・単純化して(低次元モデル化して)力学や幾何学で説明する研究は、20世紀から多くなっており、現在は生物模倣(バイオミメティクス)としても活発な研究分野となっている [24,25]。その生物が自然選択で獲得してきた構造の中でも、うすい構造とその機能についてこの章でいくつか紹介する。

甲虫の翅の収納

昆虫は4億年以上前から陸上に存在し [26,27]、生物で最大の種数になるほど多様に進化している生物グループである。その原因のひとつは、翅(羽)を持ち、無脊椎動物でも唯一飛行できることが挙げられる。これによって、地上のあらゆる場所に生息域を拡大し、環境に合わせて多様化してきた。翅は、鳥類や一部の哺乳類、爬虫類が持つ構造に厚みがある翼とは違い、非常にうすいシート構造で発生起源も異なる。うすいということは、破れたり壊れたりしやすいというデメリットを昆虫は背負っていることになるが、それでも昆虫が繁栄している背景には、うすいことのメリットを巧みに活用した独自のデザインがある。

特に弾性面を活用する設計は、カブトムシやテントウムシに代表される甲虫目が持っている。甲虫は、昆虫だけでなく動物界でも最大数の“目”であるほど多様である。甲虫目は別名で鞘翅目とも分類されており、その最大の特徴は前翅(前羽)が甲羅のように硬くなっていることである。この硬い前翅を鞘翅さやばねとよぶ。そして後翅は、普段この鞘翅の下に折りたたまれた状態で収納されており、必要に応じて展開してすぐさま飛翔することができる。翅を鞘の中に収納できることの利点は大きく、デリケートな翅を鞘で防御することで、飛翔しない時は土中でも水中でも様々な環境を移動することを可能にしている。しかし翅を収納してしまうと、一般には、いざという場合にすぐには展開できず、捕食者などの危険から逃げるチャンスを失ってしまうように思われる。(いくら外皮の硬いカブトムシであっても、カラスやタヌキなどには捕食されてしまう [28]。)この問題に対して、甲虫は翅の弾性を利用することで、瞬間的な翅の展開を可能にしている。収納時は翅に曲率を持たせて弾性力を溜め、鞘翅を開くと復元力で一気に展開できるような折りたたみ方をしている [29,30]。もちろん鳥類や哺乳類も翼を折りたたむが、こちらは翼内の筋肉や腱などの付随した別の構造によって駆動している。一方で、甲虫の翅で筋肉が付いているのは翅の付け根部分のみで、駆動はうすい面の弾性力が主となっていることが驚異的で

ある。

またうすいことによる柔軟さは、変形しても壊れないというメリットにもなっている。飛行機の翼は鳥を模して作られており厚みがあるが、機体がバランスを崩して翼が地面に触れただけで大破し、飛行できなくなる。その点、昆虫の翅は薄く容易に曲がって変形したとしても、破れなど構造の破壊は免れる。夏の街灯に虫が引き寄せられて何度もぶつかったとしても、(それが紫外線誘引の電撃殺虫灯でない限り)簡単に翅が破れてしまうことはない。さらに前後の翅を一体化させて飛行するチョウやハチは、前羽と後羽をフックのような翅鉤しごうとよばれる構造で接続しており、想定以上の外力が加わったときや翅をたたむときに、まずこのフックが外れることで翅自体の破損を回避する工夫がなされている [31, 32]。

折りたたまれた状態でのシート形成

うすい構造の設計という観点からも昆虫の翅は興味深いデザインがある。昆虫は節足動物門に属し、成長に合わせて外骨格を更新、つまり脱皮をする。そして昆虫では特に多くの種が脱皮で変態し、さらには成虫になるときに羽化して翅を獲得する。外見的に翅は昆虫が成長段階の最後に出現するように見えるが、実際には発生の段階からその基になる構造は体内に存在する [33, 34]。そして羽化前の形態である終齢幼虫または蛹の胸部皮下で、最初から高度に折りたたまれた状態で形成され、羽化時に展開される。翅の展開方法は、主に翅の膜に網目状に付随した翅脈と呼ばれる体液輸送の管の膨張によるものと考えられるが、このときに不整なく展開できることは驚異的である。

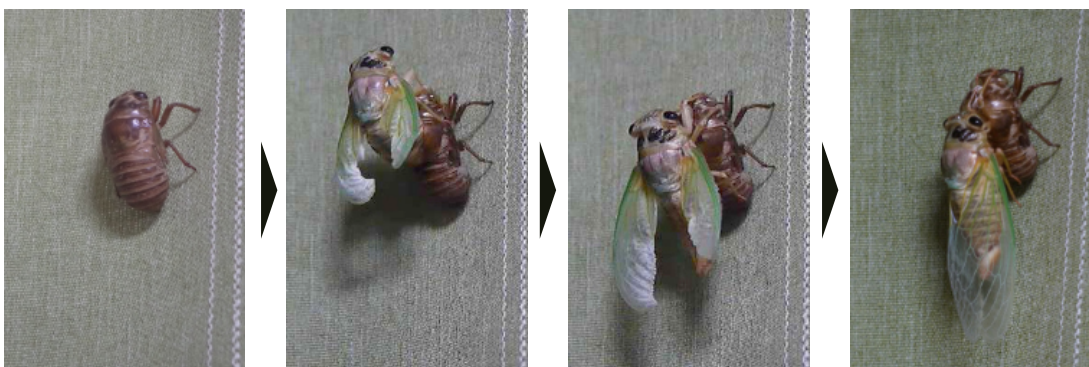


図 1.5 羽化中のクマゼミのスナップショット。終齢幼虫が背中側の外皮を割って出て来た直後は、背中の翅がまだ折りたたまれているが、体液の注入と重力によって徐々に広がり、透明で平坦な翅に伸びた。自宅のカーテンに登って2時間ほどかけて羽化し、翌朝表面が固まるまでじっとしていた。

効率よく収納し、スムーズに展開するための折りたたみ構造を、クマゼミの羽化で観察した(図 1.5)。クマゼミは 2021 年の夏現在、近畿では市街地でも街路樹などで一般的に見られる大型のセミである。観察した固体は、2021 年 7 月 28 日午後 5 時 30 分ごろに滋賀県草津市笠山付近(北緯 34°58'59" 東経 135°57'2")で米田愛未が車通りのある舗装道路上を徘徊していた終齢幼虫を捕獲したものだった。展開するセミの翅にもミウラ折りに似たジグザグの縦横折り目パターンが見られた(図 1.6)。翅を鉛直下向きに展開させることから、翅脈の膨張だけでなく、重力による引っ張りも利用して展開しているようで、引っ張りの縦方向だけでなく横方向にも翅が広がるのは、ミウラ折りに似たパターンの二軸伸展の効果であると考えられる。

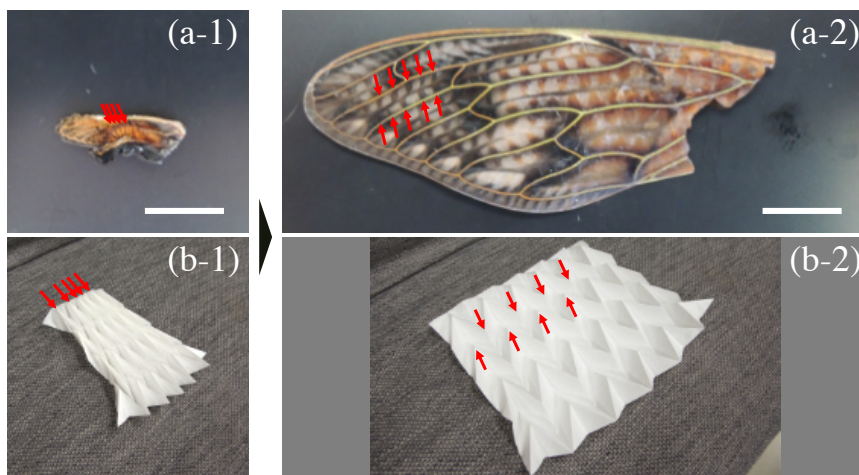


図 1.6 (a-1) アブラゼミの羽化直後の翅。アブラゼミは夜明け前に羽化することが多いが、何らかの要因で羽化に失敗すると翅が伸びきらずに死ぬ。早朝にセミの多い木を調べてまわり、羽化に失敗して死んだセミがアリに回収されていたところを、翅だけ回収した。(a-2) 展開したアブラゼミの翅。寿命で死んだセミがアリに回収される前に翅だけ回収した。(a-1)と比較すると、横方向だけではなく縦方向にも広がっていることが分かる。(b-1) 紙で作成したミウラ折り模型の収納状態。波のパターン(赤矢印)が(a-1)セミの翅と一致する。(b-2) 展開したミウラ折りの模型。矢印で示したジグザグに現われる凹凸のパターンが(a-2)と一致する。

植物の葉・花卉の展開

植物の葉や花卉も効率の良い展開構造を持っている。花卉は花粉の媒介昆虫を誘引する目印という目的を担っている。昆虫は花の匂いの他に、色や形、電場の変化 [35] によって蜜の位置を感知するので、花卉はなるべく大きい方がよい。材料コストを抑えつつ巨大化させるには構造を薄くする必要がある。植物でも昆虫の翅同様に収納された状態で膜状

組織が形成され、つぼみが開くときには不整なく展開しすることができる。アサガオにおいて、その花卉の展開の様子を観察することができた。アサガオの花弁は全体のねじれを伴いながら展開する(図 1.7)。展開の瞬間はつぼみが膨らんでいく駆動と比較して、非常に短い時間スケールで弾性的に開花する。昆虫の翅がほぼ平面状に展開するのに対して、植物の花弁は図 1.8 のように中央の花粉に媒介昆虫を誘導しなければならないことから、多くの場合円錐状に面を展開するので、そのために昆虫とは異なる折りたたみ構造でつぼみを形成している [36]。このように、あらかじめデザインされた展開形状を実現するために、収納状態を制御する折りたたみ方法も様々なパターンが存在している。



図 1.7 アサガオの開花のスナップショット。花は折りたたまれたつぼみの状態で形成されているにもかかわらず、開花時には不整なく展開することができる。

また、つぼみ以外でも、図 1.9 のようにカタバミなどは種子を覆う膜を利用した種子散布の機構を獲得している [37]。この機構にはうすい構造の折り目ではなく、面自体の弾性が大きく関与していることが知られている。

1.3.2 人工物の例

弾性体折紙

理想的な剛体折紙、つまり面は変形せず厚さはゼロで折り目の回転による幾何学のみモデルとは違って、現実の展開できるうすい構造は、多少なりとも変形による力学応答が存在している。近年の研究で、折り目に関しては、その弾性エネルギーに注目して折りや曲げに必要な力やモーメントが説明されている [38, 39]。ただし、やはり 1.3 章で紹介した生物の体や一部の人工物にあるようなうすい構造の多重安定性やスナップの力学を理解するには、折り目弾性のみ議論では不十分であることも確認されている [40–43]。これらの問題を考えるためには、弾性のある面の曲げとねじれの考察が不可欠である [44]。



図 1.8 花卉は多くの場合円錐状に開いており、花粉がある中央にハナバチなどの媒介昆虫を誘引する形状に展開している。ただしその構造はうすいため、写真のようにクマバチなどの大型昆虫に外から穴を開けられて直接蜜だけ奪取されることもある。

そのために、面の弾性変形も可能な構造の研究が試みられており [4]、このような柔軟なうすい構造を本研究では、剛体折紙と対比して「弾性体折紙」構造と呼ぶ。従来の剛体折紙構造は、面の変形をできるだけ排除して幾何学のみで制御できることを前提とし、設計が比較的容易で驚異的な展開効率を持つ機構を生み出した。対して弾性体折紙は、変形によって面の内部に生じる応力と復元力を積極的に利用することで、外的な駆動装置を必要としない自己駆動テクノロジーなど、より自由度の高い機能を展開収納の人口システムに提供できると期待される。このことから、ソフトマター物理、ソフトロボティクス、医療工学など多くの分野で実用的な応用が考えられているが、弾性折紙構造にも技術的な課題がある。面の曲げ、ねじれなど幾何学的な非線形性と、それに伴う力学の複雑さから、剛体折紙ほど設計の枠組みが明確ではない。2章で説明する紙ばねは、面の弾性変形が力学特性の主体となる弾性体折紙の具体例であり、誰でも簡単に作成できる単純なモデルである。

折り切り紙

1.2.2 章で述べたような一般的な平面切り紙 [45] は、面の曲げによって変形するが歪みによる弾性の復元力で元の平面のみが安定形状になる単安定構造である。そして一般的な剛体折紙は、制作工程において変形は折り線に集中しており面は歪まず復元力はないので、折り線の弾性を除けば常時安定構造である。この折り紙と切り紙の2つの要素を

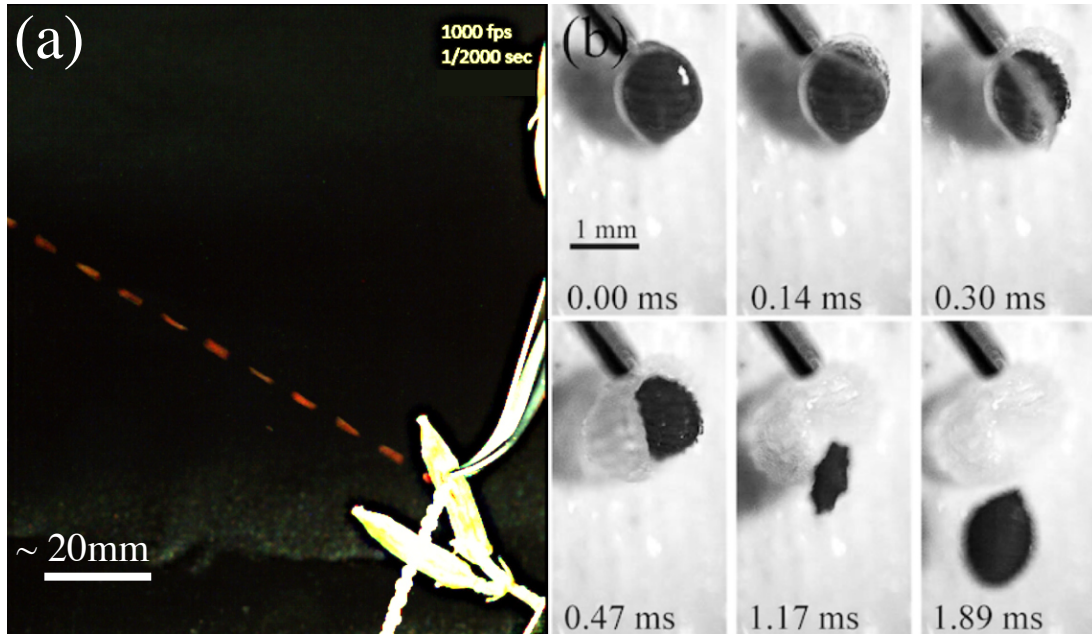


図 1.9 (a) 研究室で撮影したカタバミの種子射出のストロボ撮影。右下の細長いものが果実で、赤い点として右上へ一直線に飛んでいるものが種子。シャッター間隔は $1/1000\text{ s}$ ごとで、シャッタースピードは $1/2000\text{ s}$ のハイスピードカメラで撮影した。(b) 高速射出は種子の皮膜の弾性変形を利用して実現している [37]。

合わせ持つ構造をここでは「折り切り紙」とよぶ。折り切り紙は、駆動に対して離散しているいくつかの安定形状と復元力の両方を獲得していることで、適切にデザインできれば多重安定な系となる場合がある。3章で取り上げる Rotational Erection System (以降“RES”)は折り切り紙の構造で、多重安定性を持つ例である。折り線と切り線の幾何的な条件からどのようにして創発するのか、うすい弾性体構造の多重安定性を調べる上で基本構造のワーキングモデルとして適している。

1.4 うすい材料の弾性力学理論

うすい材料は体積のある弾性体とは違い、特定の方向に長さが小さいという形の異方性を持つ。そのため面内方向の圧縮と面外に向かう曲げの2つの性質の異なる変形が実現し、体積のある材料には真似できない力学特性を発揮する。

付録 A.1 に示した三次元の弾性体の力学理論を使って、二次元的な弾性体の変形をうまく記述する方法をまとめる。ここでは図 1.10 のように z 軸方向 (縦方向) に十分薄く、 x 軸と y 軸の2方向には物体の広がりがある平板の場合を考える。また前提として z 軸

方向の面には外力がない状況、つまり面には縁の部分にのみ外力が加わる状況であるとする。このとき、 z 軸方向には十分うすいことから、 z 方向には応力の変化ができる余地がないので、板内任意の位置で

$$\sigma_{iz} = \sigma_{zi} = 0 \quad (i = x, y, z) \quad (1.1)$$

が成り立つ。

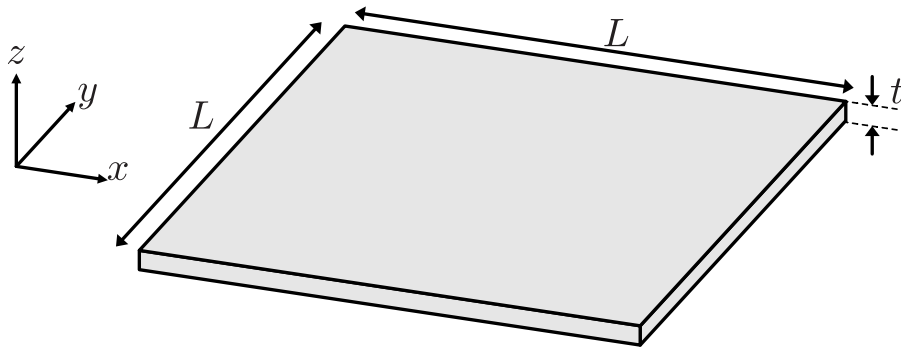


図 1.10 考える板は xy 平面に長さ $\sim L$ 広がり、 z 方向には十分うすい $t < L$ 。板の物性はヤング率は E 、ポアソン比 ν として、等方弾性体であるとする。

板は厚み一定かつ材質も一様である場合を考える。また図 1.11 のように厚さ方向の中央に、板の曲げ変形で面内に伸び縮みがない (つまり isometric な) 中立面が存在し、中立面に垂直な断面は板の曲げ変形後も中立面に垂直を維持すると仮定する。この仮定はキルヒホッフ仮定と呼ばれる。便宜的に中立面の位置が $z = 0$ であるとする。

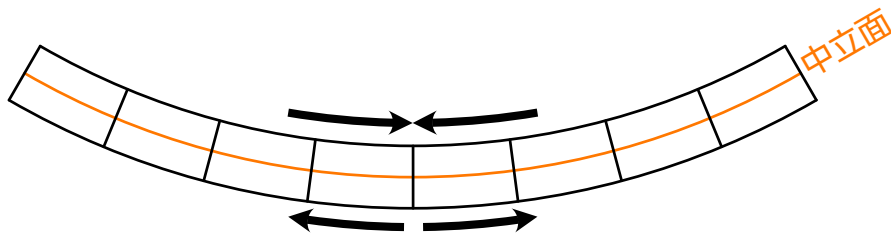


図 1.11 キルヒホッフの仮定。図示するように中立面があり isometric な曲げ変形の場合、厚さ方向に変化するひずみから曲げエネルギーを考える。

1.4.1 板の変形エネルギー：面内方向の伸縮と面外方向の曲げ

板の変形は、図 1.10 の xy 平面内方向への伸縮と、 z 方向への曲げに分解して考えることができる。まずは伸縮に必要なエネルギーを導出する。付録 A.1 に示した弾性固体の変形エネルギーの式 (A.57) にうすい板の条件式 (1.1) を当てはめると、添字が z の項が消えるので、新しく添字 α, β を x または y のみで変化するものとして、

$$\mathcal{E}_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int_{-t/2}^{t/2} dz \iint_S dx dy (\sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}) \quad (1.2)$$

と書き換えられる。ここで、線型応答の変形範囲内であれば、応力とひずみの関係が $\sigma = E\epsilon$ であるので、式 (1.2) から伸縮のエネルギーは、

$$\mathcal{E}_s = Et \iint_S dx dy (\epsilon_{\alpha\beta})^2 \quad (1.3)$$

と表わすことができる。

次に十分小さい曲げ変形に必要なエネルギーを考える。 x 軸まわりに板の曲率が $1/R$ になるように曲がったとする。このときに isometric な変形であれば中立面の伸縮は含まないので、 y 軸まわりには曲がらない状況を前提とする。そうすると、板の中立面は円柱側面の一部とみなせる。前提として中立面は伸び縮みがないので、任意の位置で $\epsilon_{\alpha\beta} = 0$ となる。板は中立面には厚さ方向に材料がくっついていて、中立面から厚さ方向に h だけ離れた面は、曲げの外側であれば伸ばされ、内側であれば縮められる。このときの伸縮のひずみは、

$$\epsilon_{\alpha\beta}(h) = \frac{h}{R} \quad (1.4)$$

となる。 $-t/2 < h < t/2$ であり、曲げが十分小さければ $z \sim h$ なので、ポアソン比も考慮すれば式 (1.2) から曲げのエネルギーは、

$$\mathcal{E}_b \sim \frac{1}{2} \iint_S dx dy \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R(x,y)} \right)^2 \quad (1.5)$$

となる。

1.4.2 座屈

式 (1.3), 式 (1.5) より、板の伸縮のエネルギーは厚さの 1 乗 t に、曲げのエネルギーは厚さの 3 乗 t^3 に依存することがいえる。このことから厚さ t が十分小さくうすい極限を

考えると、曲げの変形の方が弾性変形のエネルギーコストが小さいため、うすければうすいほど体積のある弾性体とは違い容易に曲がる変形が卓越することがわかる。うすい弾性体のシートに面内で圧縮するような外力を加えた場合、材料が曲がってしまった方がエネルギー的に有利なので、外力がある臨界を越えたときに突然形状が大きいたわんで変形してしまう。このことを座屈という。また座屈をするために必要な最低限の臨界外力を座屈荷重という。外力が材料を破壊する大きさでなくても、どれだけの荷重で座屈し大変形が生じてしまうかを知ることは、建築物をはじめとして構造の形状を維持するために重要である。座屈荷重は材料の剛性や形状、境界の固定方法によって変化する。3.5.1 章では座屈の理論を用いた議論もするため、ここで境界を点固定 (ピン固定) している場合の座屈荷重を計算し、剛性や形状との関係性を考える。

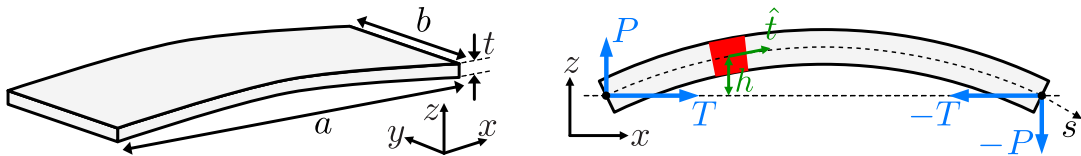


図 1.12 $a \times b \times t$ の板の長さ b の辺に外力 $\vec{F} = T\hat{e}_x + P\hat{e}_y$ を加え座屈したときの状況設定。 s は中立面に沿った経路で、長さ a の辺側から断面を見て、 s の曲げに対する単位接線ベクトルを $\hat{t}(s)$ 、 z 方向のたわみ量を $h(s)$ とする。

状況設定として、シートの長辺の長さを a 、短辺の長さを b 、厚さを t とする。そして、短辺部分にのみ一様に外力 \vec{F} が加えられ、座屈が生じた瞬間に図 1.12 のように、変形したとする。長辺方向の中立面に沿った経路を s とし、図 1.12 の赤で囲んだ s から $s + ds$ にある微小長さの領域を考える。この微小領域は s の位置で z 方向に $h(s)$ だけ変位があるとする。 h が十分小さい場合を考えると、 $s \approx x$ とおける。ここで微小領域での力とトルクのつりあいを考えると、

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = \vec{0} \quad (1.6)$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \hat{t} \times \vec{F} = \vec{0} \quad (1.7)$$

と書ける。これをキルヒホッフの方程式という。ここで、 \hat{t} は、微小領域で経路に沿った座標 s の方向を向く単位ベクトルで、

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \approx \frac{d\vec{r}}{dx} = \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} x \\ h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ h' \end{pmatrix} = \hat{e}_x + h'\hat{e}_y \quad (1.8)$$

と表わせる。さらに境界を点固定する条件を考慮して、 $s = 0$ および $s = a$ における境界

条件を以下のように設定する。

$$\vec{F}(s=0) = -T\hat{e}_x - P\hat{e}_y \quad (1.9)$$

$$\vec{F}(s=a) = -T\hat{e}_x - P\hat{e}_y \quad (1.10)$$

$$\vec{M}(s=0) = \vec{0} \quad (1.11)$$

$$\vec{M}(s=a) = \vec{0} \quad (1.12)$$

トルクの大きさ $M=0$ であることが、境界で角度が自由に動く、いわゆる点固定の条件に対応する。キルヒホッフの方程式 (式 (1.6)) より、

$$\vec{F}(s) = \text{const.} = -T\hat{e}_x - P\hat{e}_y \quad (1.13)$$

である。また、

$$\hat{t} \times \vec{F} = (-P + Th')\hat{e}_z \quad (1.14)$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} \approx \frac{d\vec{M}}{dx} = \frac{d}{dx}(B\kappa\hat{e}_z) = Bh'''\hat{e}_z \quad (1.15)$$

なので、式 (1.7) は、

$$(Bh''' + Th' - P)\hat{e}_z = 0 \quad (1.16)$$

である。ここで、導入した曲げ剛性 B は曲率 κ を使って、 $M(s) = -B\kappa$ で定義される曲げにくさを表わす指標である。 $\kappa = h''$ であることに注意して、得られた式の両辺を微分すると、

$$\frac{d^2\kappa}{dx^2} = -\frac{T}{B}\kappa \quad (1.17)$$

が得られる。これは単振動の式と同じ形をしているので、

$$k = \sqrt{\frac{T}{B}} \quad (1.18)$$

とおくと、 C_1, C_2 を定数として、 $\kappa(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)$ となり、さらに積分定数を c_1, c_2, c_3, c_4 とおいて積分すると、

$$h(x) = c_1 + c_2x + c_3 \cos(kx) + c_4 \sin(kx) \quad (1.19)$$

となる。ここで境界 $s(=x) = 0$ において、

$$h(0) = c_1 + c_3 = 0 \quad (1.20)$$

$$\frac{d^2h(0)}{dx^2} = -c_3k^2 = 0 \quad (1.21)$$

が常に成り立つため、 $c_1 = 0$, $c_3 = 0$ であることがわかる。また、 $s(\approx x) = a$ においては、

$$\frac{d^2h(a)}{dx^2} = -c_4k^2 \sin(ka) = 0 \quad (1.22)$$

となるが、もし $c_4 = 0$ を仮定すると、

$$h(a) = c_2x + c_4 \sin(ka) = 0 \quad (1.23)$$

より、 $c_2 = 0$ となって、任意の位置 x で $h(x) = 0$ 、つまり座屈していない状態を表わすため、今は $c_4 \neq 0$ の場合を考える。式 (1.22) が常に成立するためには、1 以上の自然数 n で $ka = n\pi$ が必要となる。このことから、座屈は $n \geq 2$ となるような波の形状で発生することも考えられ、確かに衝突などの瞬間的な変形では慣性によって波数の多い座屈が生じるが、準静的な変形においては変形のエネルギーコストを最小に抑えるため、 $n = 1$ となるような変形が実現する。よって、式 (1.18) より

$$ka = \sqrt{\frac{T}{B}}a = \pi \quad (1.24)$$

なので臨界座屈荷重は、

$$T_c = \frac{\pi B}{a^2} \quad (1.25)$$

となる。

ここでさらに曲げ剛性 B についてより詳しく考えると、曲げ剛性はヤング率 E と材料の形状パラメータで表現することができる。厚さ方向に t' 軸をとり、曲がったときの微小領域の中立面に沿った経路 \vec{s} が半径 R の扇の弧に一致すると考える。このとき、中立面から垂直方向に t' だけ離れた位置に生じる s に沿った方向の応力を $\sigma(t')$ とすると、微小領域を曲げておくために必要なトルクは、

$$M = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} t' \sigma(t') b dt' \quad (1.26)$$

である。簡単のためポアソン比を考慮しない近似をおくと、 $\sigma(t') \sim Et'/R = Et'\kappa$ なので $M \sim Et^3b\kappa$ となり、曲げ剛性の定義から、

$$B \sim Et^3b \quad (1.27)$$

となる。式 (1.25) より、臨界荷重は

$$T_c \sim \frac{Et^3b}{a^2} \quad (1.28)$$

と表わすこともできる。ヤング率 E は材料に依存するパラメータであるが、それよりも形状に関するパラメータ a や t の方が、座屈の発生に大きな影響を与えるため、ここでも形状のデザインが重要になることがわかる。

座屈臨界の式は式 (1.11), 式 (1.12) で境界にピン固定の境界条件によって得られるが、どのような境界条件でも座屈荷重は式 (1.25) に係数をかけた表式

$$T_c = m \frac{\pi B}{a^2} \quad (1.29)$$

となる。これはオイラーの公式と呼ばれる。係数 m は様々な境界条件によって変化するが、せいぜい数倍程度である [46]。すべての境界条件についてここでは言及しないが、例えば両端をクランプ固定 (角度固定) の境界条件などに変えて同様に計算すれば $m = 4$ 、一端をクランプ固定してもう一端を自由境界にすれば $m = 1/4$ である。

1.5 注目する 2 つの構造：紙ばねと RES

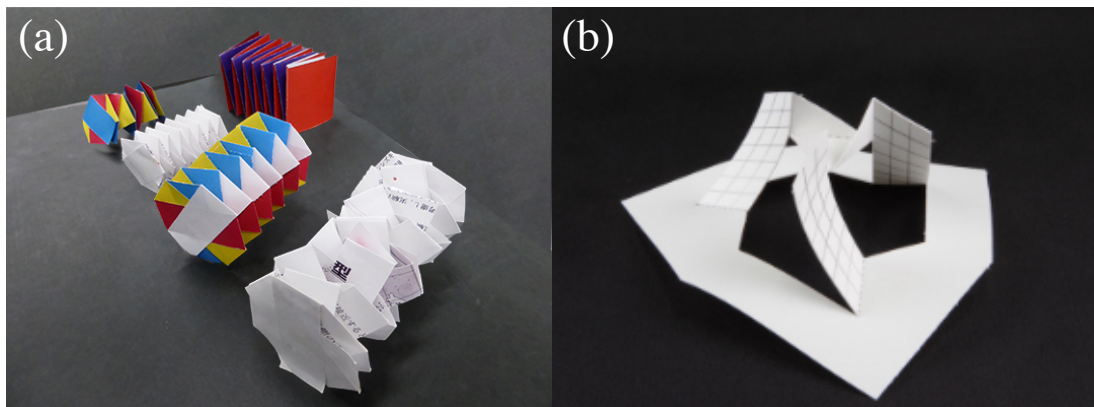


図 1.13 (a) 紙ばね。複数本の帯を折り込んだ弾性折紙で、面の弾性によってばねのように伸び縮みする。(b) RES。回転を伴って立体化する折り切り紙で、多安定性をもつ。

弾性体の力学理論の中で最も基本的なものは、応力 σ とひずみ ϵ が比例するフックの線形則 $\sigma = E\epsilon$ であり、これは 400 年近く前に記述された“古典的”な力学法則である。弾性体折紙も理想的にはこのフックの法則に従って変形するため、既に確立されたフック則によって弾性折紙もまた理解できたと結論付けてしまうかもしれない。しかしながら、実際のところその考えは早計である。局所的な視点に立った材料の弾性法則と、弾性折紙の系の全体で発現する機能を説明することには、まだまだ大きな隔たりがある。例えば、1.4.2 章で詳しく説明するが、弾性面に沿った伸縮に必要なエネルギーは面の厚さに比例

するが、面外方向の曲げのエネルギーは厚さの3乗に比例する。このことから厚さのうすい材料は、よりエネルギーコストの小さい曲げの変形を生じさせることになり、ここから座屈という現象が説明される。この変形の理論は、いくつかの仮定とフック則によって導出されるものの、決して自明な説明とは考えられない。弾性折紙には、うすい構造特有であると思われる機能がいくつかあるが、その機能を生み出す基本の形状が何なのか、力学的な背景も含めて理解することは現状困難なことが多い。

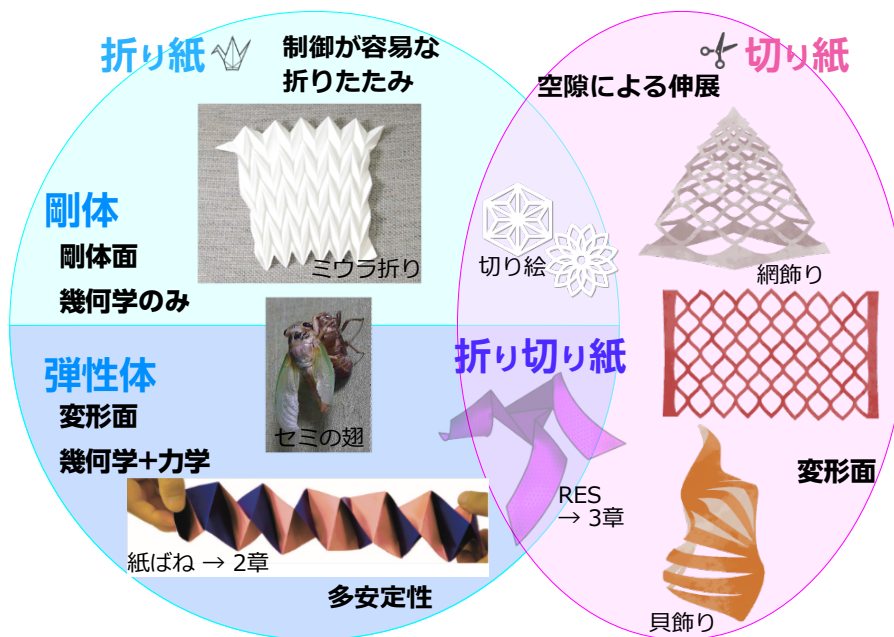


図 1.14 うすいシートに「折り」や「切り」などの構造を工夫して配置すると、多種多様な展開と収納の特性をデザインすることができる。本研究では弾性体折り紙である紙ばねと、折り切り紙の RES を具体的なワーキングモデルとして、面の変形によって大きな復元力を生じさせたり、多安定性を発揮したりする仕組みを明らかにする。

うすいシートは折り線や切り目などの特定の構造を付与することで、展開と収納や、それに伴う運動性など、材料特性ではなく形状に大きく依存する様々な機能を創発させることができる。既にある生物の体機能を理解したり、人工システムへ適切に組み込むために、機能を有したうすい弾性構造の形状デザインと制御を可能にする普遍的な仕組みを定式化することが必要とされている。そのために本研究の目的は、ある特定の機能を生み出す二つの具体的な構造をワーキングモデルとして、実験と有限要素法解析、弾性力学理論を組み合わせることで力学特性を調べ、機能創発のメカニズムを明らかにすることである。これにより将来的には、より一般的な弾性折紙の形状と機能の関係を定量的に予想する枠組みを構築することができ、折り紙や切り紙ベースの構造による機能デザインを可能にすると

いう点で重要である。第 1 章で説明してきたうすい構造を図 1.14 にまとめる。本論文では面の変形によって自発的な駆動を可能にする、弾性体折り紙と、折り紙と切り紙のハイブリットである折り切り紙に焦点を当てる。そのワーキングモデルとして、紙ばね (2 章) と RES (3 章) を取り上げ、並進と回転のカップリング駆動、形状と力学特性の多重安定性を軸として、うすい構造の幾何学と力学を議論する。いずれも比較的シンプルであるが、他の折り紙や切り紙にないちょっとした駆動のための工夫がある構造で、展開収納における力学特性を明かにする試みとしては、前例の少ない新規性があるテーマである。

第2章

紙ばね

2.1 概要

折りたたんで大きな構造を展開収納できるうすい構造は、1.2章で紹介したように、芸術、工学、建築、生物学など様々な分野で研究されている。中でも折り紙は、折り目のパターンにより単純な平面から複雑な三次元を形成することができる [13, 14, 47]。しかしながら古典的な折紙工学である剛体折紙の研究では、ゼロではない厚さと材料の変形を伴う現実のシート構造の剛性や弾性についての説明は難しい。一步踏み込んで近年では、折り目の弾性を議論して展開と収納における力学が注目されている [38, 39] が、やはり生物が獲得しているような、うすい構造の多安定性や瞬間的な駆動ダイナミクスを考える上では、面自体が弾性変形の主となるような弾性折紙構造の理解が必要不可欠である。面が弾性変形する構造の変形幾何と力学応答において、弾性面が担う役割を明らかにするために、本研究ではワーキングモデルとして、構造がシンプルな紙ばねという折り紙に焦点を当てた。

2.2 モデル：正方形紙ばねの構造

紙ばねは複数のじゃばら折りにしたリボンを、互い違いに折り込んだ構造をしている。本研究では最も単純なリボン2本で作成する、正方形紙ばねを扱う (図 2.1)。飲み会でどうしても暇なときに、割り箸の袋をはがして作れてしまうような、老若男女問わず作れる簡単な折り紙である。もし作ったことがなければ、付録 E のページをはさみで切って実際に作ってみてほしい。折り紙の力学を考える上で 1.1.1 章で説明したスケール不変性は大きな利点である。ぜひ手のひらサイズの模型を用意して紙ばねの特徴を観察・体感して

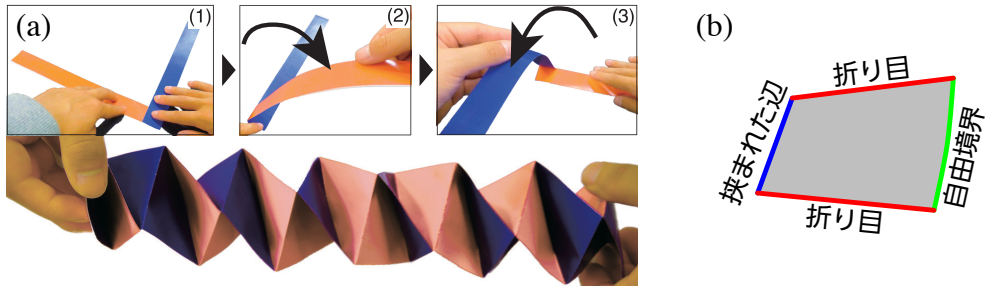


図 2.1 (a) 正方形紙ばねの作成方法。(1)2本の帯が直交するように端をはり合わせる。(2)下側の帯を上側の帯に再度直交するように重ね折り、(3)これを繰り返してもう一方の端まで折り込む。(b)1枚の正方形面の各辺の構造。

もらいたい。単純な構造ではあるが、リボンが組み合わさる幾何的な拘束から、伸展とねじれに強いカップリングがある非自明な変形を起こすことがわかるはずである。

紙ばね構造の中でそれぞれのリボンは、じゃばら帯、つまり正方形面が折り目で繋がっ

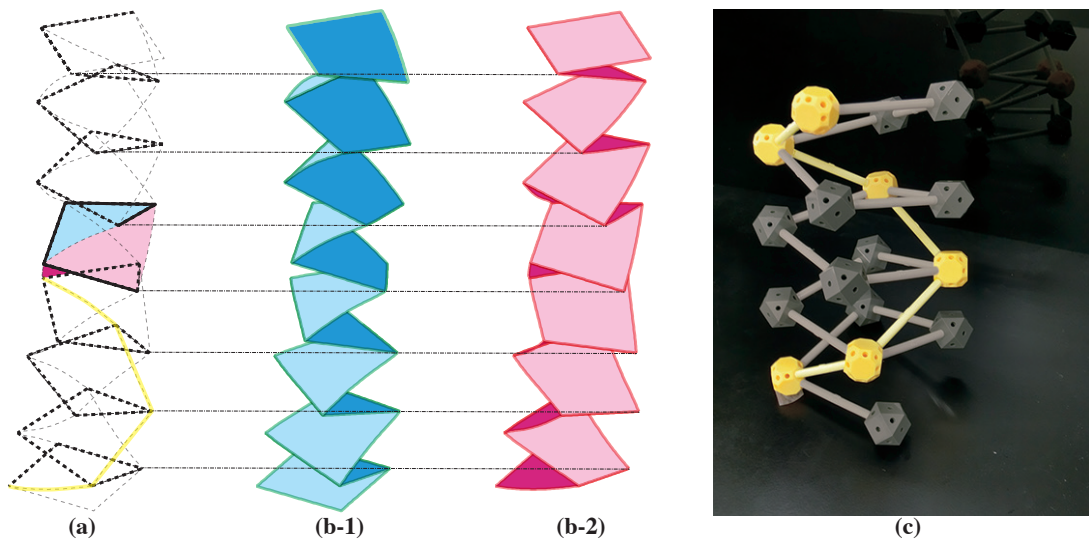


図 2.2 (a) 紙ばねを構成する正方形面の辺を強調した図。正方形面は折り目で次の正方形面へ繋がっているため、2本のじゃばら帯2本((b-1),(b-2))が組み合わさった構造である。じゃばらの折り目部分の繋がり(太点線)は、紙ばね全体の周囲に沿って螺旋構造をとり、実線で示すような螺旋1ピッチを紙ばねの1周期とここでは定義する。面の自由境界の繋がり(細点線)は長周期の逆巻螺旋となり、3周期で1ピッチとなる(黄色実線)。独立した長周期螺旋は3本ある。(c) 紙ばねの折り目螺旋の模型。各ブロックが正方形面の頂点、灰色の棒が折り目螺旋を表し、黄色の棒が自由境界辺の長周期螺旋を表している。

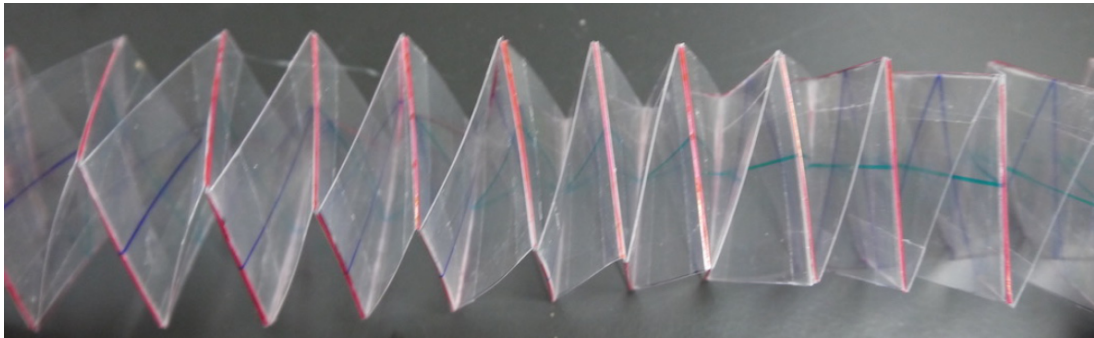


図 2.3 樹脂板で作成した紙ばね模型を伸展させた図。ヒンジ螺旋部分を赤に着色している。着色していない自由境界螺旋と比較して、じゃばらの折り目となるヒンジ螺旋はばねが伸展してもほぼ曲がらないことがわかる。

た状態となっている (図 2.2(b-1),(b-2))。1つの正方形面に注目して4つの辺それぞれの特徴を観察してみる。図 2.1(b) に示すように、1組の向かい合う2辺はじゃばら帯の折り目に相当し、他方の帯の面を挟み込む形をとる。そして他の1辺は他方の帯の折り目で挟まれており、この挟み込みが2本の帯を連動させるインターロッキング構造を作り出している。最後に残る1辺は自由境界である。もし紙ばねが剛体面で構成されていると、完全に動くことはできない。ばらばらな2本のじゃばら帯は、折り目の駆動で伸びることができるが、インターロッキング構造はそれを阻害してしまう。そのため実際に紙ばねが伸展できるのは、面が変形すること弾性体折紙であることが原因である。

紙ばねが伸展した状態でも、正方形紙ばねではインターロッキング構造の幾何的な拘束から、折り目の挟み込み部分が他方の帯の辺から離れない。そのため折り目部分は3枚の面の接する部分となり、面の曲げよりも十分大きい剛性を持ち、紙ばねが伸長しても図 2.3 で赤く強調された折り目のようにほぼ直線を保つことができる。ただし、面の変形のため折り目は完全な直線というわけではなく若干曲がる必要がある。これはミウラ折りなどの剛体折紙構造とは大きく異なる性質である [48]。そして紙ばねの構造内で折り目となる辺のみを繋げてたどると、図 2.2(a) の点線で示すように、紙ばねの周囲に沿って螺旋が形取られる。これをヒンジ (折り目) 螺旋と呼ぶこととする。ヒンジ螺旋の1ピッチを基準として、紙ばねの1周期を定める。図 2.2(a) で紙ばねの中央付近に示した実線部分が1周期である。ヒンジ螺旋の1周期には4枚の正方形面が含まれる。

さらに折り目だけでなく自由境界の辺も螺旋を形成している。これはヒンジ螺旋とは逆向きの長周期の螺旋であり、ヒンジ螺旋の3周期が自由境界螺旋の1周期に対応する。紙ばね全体で見ると、短周期のヒンジ螺旋1つと、それとは逆巻の長周期の自由境界螺旋3つが配置される。図 2.2(c) にヒンジ螺旋 (灰色) と自由境界螺旋 (黄色) を表した模型

を示す。

また、紙ばねの伸張変形と弾性は複雑な挙動を示す。帯同士が互いに折り目で挟み込み拘束し合っているため、伸張時に必ず面の変形が発生する。正方形面の変形によって、構造全体の弾性力とねじれが生じている。

本研究では正方形紙ばねに焦点を当てたが、帯の本数を増やせば偶数正多角形の紙ばねを作ることができる。ただし帯3本以上の紙ばねでは、帯の辺が他のじゃばら帯の折り目にあたる部分で挟み込まれる構造が実現せず、伸展するときに帯の辺が接触する面の上を滑る。つまり、帯3本以上紙のばねの弾性力には表面の摩擦力が含まれるため、状況がより複雑になる。さらに織り込む帯の順番によっても性質が全く異なるばねができることが興味深い。例えば4本帯の紙ばねは、帯に1から4の番号を当てたとき、 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ のサイクルで折り込んだ場合と $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ のサイクルで折り込んだ場合ではまったく異なる伸展をする。今回は面の変形に注目したため、正方形紙ばねのみ言及するが、帯が3本以上の紙ばねも作成は容易なので、図 1.13(a) のように試作してほしい。また、じゃばら帯を紐に差し替えると、三つ編みや縊り合わせなどの構造になる。本研究は構造の幾何学と弾性力学へ焦点を当てているが、さらに摩擦も含めた考察が、これらの構造の理解における重要な要素になるはずである。

2.3 実験と数値シミュレーションの方法

紙ばねの伸展駆動に関して、形状変化と力学応答の測定を正方形紙ばねの実験模型で実施し、並行して有限要素法シミュレーションで実験モデルを再現して力学応答と変形を計算した。

2.3.1 物理模型の作成方法

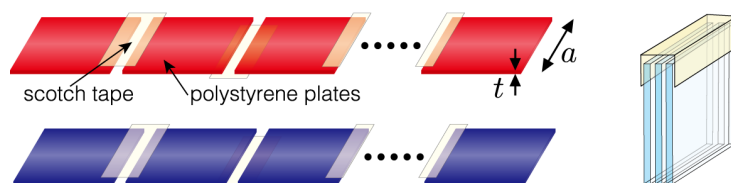


図 2.4 実験用紙ばねを構成する2本の帯は、正方形面をセロハンテープで繋ぎ合わせて作成した。この正方形面の素材はポリスチレンで、一辺の長さを a 、厚みを t とした。実験測定用模型は透明であった。

実験に用いた紙ばねはポリスチレンシート (TAMIYA, プラバン) をカッティングマシン (Silhouette CAMEO, Graphtec) で正方形を切り出して、セロハンテープで1列に貼り合わせて帯を2本作成し、それらを折り込んで形成した (図 2.4)。切り出す正方形の1辺の長さは $a = 20, 40$ mm、厚みは $t = 0.2, 0.4$ mm として、紙ばねの周期は $N = 2.5, 6$ となる紙ばねをそれぞれ作成した。ポリスチレンシートのヤング率 E は、付録 A.2 の測定で $E = 3.4 \pm 0.9$ GPa だった。テープの厚みは実測で 0.05 mm であり、貼り合わせる間隔は面の厚みの3倍を確保したので、折り目は正方形面の変形に比べて十分自由に回転できた。

合体紙ばね

ここで後の計測で問題になるのは、紙ばねを伸展させると同時にねじれてしまうことである。両端を単純に引っ張って伸展させるときに、端面の固定が困難になってしまうからだ。そこで図 2.5 のように、ねじれ方向がそれぞれ右巻きと左巻きの紙ばねを直列接続して、ねじれを相殺する合体紙ばねを作った。

紙ばねの伸長 z は、紙ばねの全ての面が同じ角度で並んだ状態を原点として、原点から合体紙ばねの端面を引っ張った変位の半分と定義した (図 2.5(1))。ただし、シートの厚みはゼロではないので、 $z = 0$ mm でも両端間距離はゼロではない。また、実験モデルにおいて注意すべきは、ばねの伸長に限界があることである。一般的なつる巻きばねが降伏するように、一定以上伸張させると、折り目部分のセロハンテープから亀裂が生じ、紙ばねは破壊されてしまった。

2.3.2 紙ばねの伸びに対するねじれの計測

紙ばねの全ての面は伸張時に変形し、終端面同士は平行にならない。しかし今回の一軸引っ張り試験においては端面を無理やり平板に貼り付け、一旦を壁に固定し、もう一端を電動スタイダーに取り付けて伸展させた。また、合体紙ばねは水平方向に伸長させた。予備実験において伸長した紙ばねは図 2.5(1) のように重力により若干たるんだが、 a を2倍にして重力の影響 (質量) を4倍にしても後述するねじれ角度のスケーリングに顕著な影響を及ぼさなかったので、重力の効果は無視した。

合体紙ばねの接続部分 (合体ばねの中央) の面に指標棒を取り付け、伸長上軸にカメラを設置し、線形アクチュエータで伸長を制御する。制御した伸長 z (mm) に対する初期位置からの指標棒の回転角度を、紙ばねのねじれ角度 Φ (rad) として計測した。伸長 z は 5 mm ずつ増加させ、その都度図 2.5(2) のように指標棒を撮影した。撮影した画像を解析

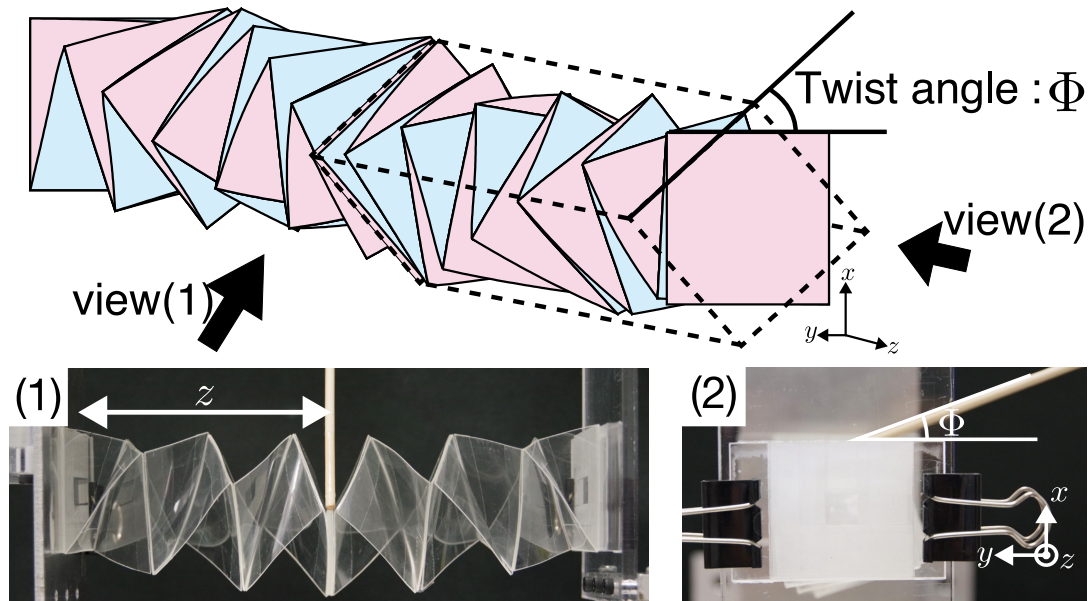


図 2.5 ねじれ角度の測定方法。両端を平行移動で伸長できるように、互いのねじれを相殺し合う右巻きと左巻きの紙ばねを直列につないだ合体紙ばねを作成した。(1) 伸長時、合体紙ばねの伸びの 1/2 を紙ばねの伸長 z とする。(2) 中央の面に指標棒を取り付け、伸長軸に設置したカメラからそのねじれ角度 Φ を計測する。

ソフト (ImageJ) に取り込み、 $z = 0 \text{ mm}$ の角度との差をねじれ角度 $\Phi(\text{rad})$ として測定した。

2.3.3 紙ばねの伸びに対する復元力の計測

合体ばねの一端を固定し、もう一端に取り付けたロードセル (LTS-2KA, Kyowa) をアクチュエータで紙ばねの伸長方向に引っ張った。このとき紙ばねの両端面は平行に動かす必要があるが、ロードセルは一点でしか固定できず、端面にかかる紙ばねのトルクを打ち消すことができない。そこで伸展方向にのみほぼ摩擦なしで動く力学台車のような接続具を取り付け、トルクの影響を消した。接続具の模式図と写真を図 2.6 に示す。水平面上にコロ受け軸 2 本を置き、コの字型の台を乗せ、一方向にのみコの字台が動くようにした。台に接続した紙ばねは水平に伸展させた。コの字型台には穴が空いており、そこにロードセルの荷重検出棒を水平に差し込み、留め具で固定した。これでロードセルの荷重検出方向と紙ばねの伸展軸が平行になった。このとき、ロードセルを穴の高さに設置するためにジャッキを用いていた。また、ロードセルの接続位置は、紙ばねの伸展軸とほぼ一致するように調整した。このセットアップで、伸長 $z(\text{mm})$ に対するロードセルが測定し

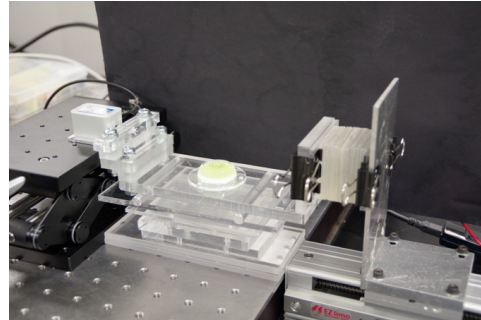
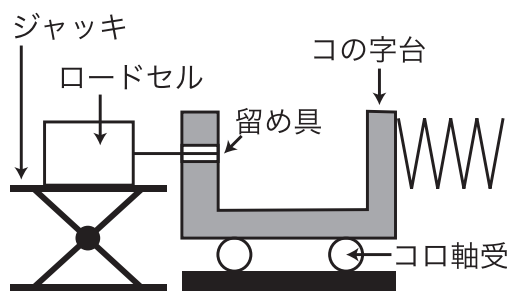


図 2.6 紙ばねとロードセルの接続装置。紙ばねの終端面にかかるトルクを受け止め、かつ伸展軸方向には自由に動ける力学台車のような機構で接続している。

た力を、紙ばねの弾性力 $F(N)$ として測定した。

力学測定における $z = 0 \text{ mm}$ の決め方

紙ばねの伸長の原点 $z = 0 \text{ mm}$ は、紙ばねが最も縮んだ状態、つまり構成する全てのシートが平行に並んだ状態である。力学実験で問題になるのは、模型の紙ばねにおいてはシートが平行かどうか確認するには目視するしかなく、精度十分ではなかったことである。そのため、力学測定の結果から伸長の原点を割り出す方法をとった。

荷重測定用ロードセルは紙ばねを取り付けていないときをあらかじめ $F = 0 \text{ N}$ に設定し、紙ばねの弾性力によってコの字台が引っ張られると正の力を計測した。ある程度伸張させた状態の紙ばねを測定装置に取り付けると $F > 0 \text{ N}$ であり、ここから紙ばねを縮めていくと、理想的には伸長 $z = 0 \text{ mm}$ で測定される力の正負が切り替わり、少しでも伸長が負 ($z < 0 \text{ mm}$) となれば力は不連続に限りなく絶対値の大きな負の値 ($F \rightarrow -\infty$) となるため、このことを考慮して伸長ゼロの原点 $z = 0 \text{ mm}$ を決定できる。

ただし実際には、伸長 $z = 0 \text{ mm}$ 近傍では各シートの曲げ変形に伴う弾性力は小さくなるため、セロハンテープの曲げ弾性力が顕在化してしまい、 $z > 0 \text{ mm}$ である領域でも力が負になり、連続的に限りなく大きな負の値となってしまったため、伸長の原点が明確ではなかった。そこで、紙ばねの弾性力と比較して十分絶対値の大きな負の値になる点を $z = 0 \text{ mm}$ とみなすこととした。

準静的な伸展駆動

紙ばねの弾性力 F は準静的な駆動において測定した。 $v (= dz/dt) = 2.5 - 10.0 \text{ mm/s}$ の範囲で $a = 20 \text{ mm}$, $t = 0.2 \text{ mm}$, $N = 6$ の紙ばねの弾性力曲線を予備測定したところ顕著な差異は見られなかった (図 2.7)。この速度 v 範囲では弾性力 F は伸長速度には依存

しなかったため、この範囲の速度設定で伸長を連続的に変化させて弾性力を計測した。

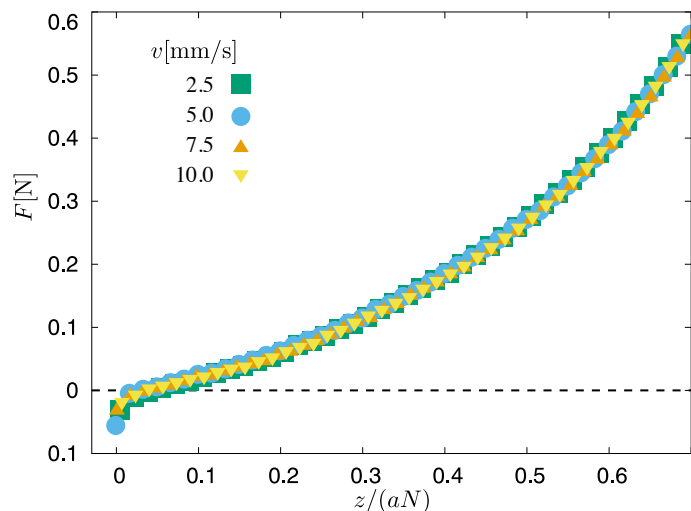


図 2.7 $a = 20 \text{ mm}$ 、 $t = 0.2 \text{ mm}$ 、 $N = 6$ の紙ばねモデルを測定装置に取り付け、伸長速度を $v = 2.5, 5.0, 7.5, 10.0 \text{ mm/s}$ に変化させたうえで伸長させたときの弾性力 $F(\text{N})$ を測定したグラフ。それぞれの測定結果はよく一致し、速度に依存した統計的な弾性力の変化は見られないため、この伸長速度範囲で速度依存性はないと結論付ける。

2.3.4 シート 1 枚の曲げ弾性力の計測

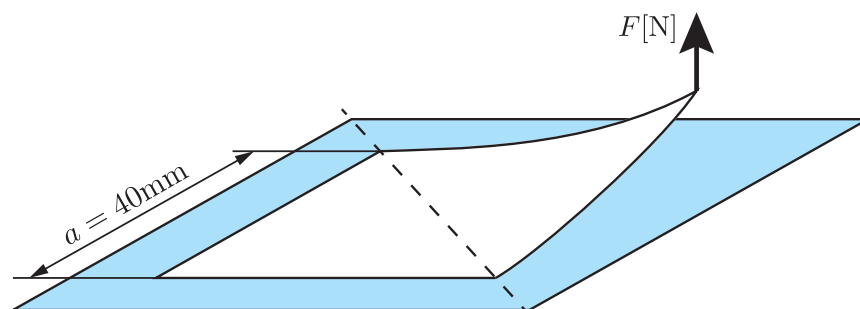


図 2.8 厚みの異なる正方形面 1 枚の曲げ実験の模式図。図中点線より左下は水平面に固定し、正方形面の張角 1 点を鉛直上向きに引っ張って、曲げ弾性力と引っ張り変位を測定する。

紙ばねを構成する正方形シート 1 枚の曲げに必要な力も測定した。辺の長さ $a = 40 \text{ mm}$ 、厚み $t = 0.2, 0.4 \text{ mm}$ の 2 種類の正方形板に対して曲げ弾性力の測定を行った。図 2.8 のように正方形の対角半面を水平面に固定し、頂角を十分伸び縮みしないピアノ線

で鉛直上方向に $u(\text{mm})$ だけ引っ張ったときの張力を測定した。このとき u が大きくなると、純粋な曲げ弾性だけではなく引張り弾性の影響も出てくる可能性が示唆された。

2.3.5 三次元形状計測

変形力学を議論するにあたって、構造の変形や要素の変位を定量的に計測する必要がある。紙ばねの伸長など一次元的な変形は、定規を当てるなど比較的簡易な方法で計測可能である。しかし、立体化するときの三次元的な変形や、面の曲率分布、運動中の変位などの場合は、光学測定による空間座標の決定が有用であるため、紙ばねの曲面の曲率分布計測のためにステレオ写真法 [49] による三次元形状計測を実施した。

この測定法は紙ばねの他、円錐台形シェルなどいくつかの静止した曲面、または回転運動する細菌のべん毛モデルの変形軌道などの動的な測定にも活用した手法である。ステレオ法は座標 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ に設置した 2 台のカメラで対称とする三次元空間内の点 \mathbf{Q} を撮影し、三角測量の要領で視差を利用して点 \mathbf{Q} の座標を特定する。他の三次元の形状計測の方法として、ピント調整によるレンズ焦点法や、レーザー光を用いたパターン投影法 [49] があるが、設備の制約が少ないことや、並行して実施していた細菌べん毛の計測など運動中の計測の必要があったことなどの理由から、ステレオ写真法を選択し計測実験システムを組んだ。

ステレオ写真法の計測手法

幾何学的理論に基き、独自に構築したカメラを使用した形状計測手法についてまとめる。一般的に 2 視点のカメラから空間を測位する手法はステレオ写真法、または両眼視差法と呼ばれる。人間の視覚的な空間把握はこの手法を活用している。利点は計測システムの設備にパターンレーザーや暗室などの特殊な装置を必要とせず、テーブルトップスケールの測定においては市販のデジタルカメラで十分な精度を得られることである。動画にも対応しやすい。デメリットは、カメラを指定した座標、指定した向きに空間設置するための固定フレームを組み立てなければならないことと、カメラを設置した方向からしか情報が得られないため、物体の裏側などの見えない部分は一度に計測できないことが挙げられる。カメラの構造と光学測定は付録 B.1 章にまとめたことに注意して計測を実施した。

図 2.9(a) に示すように、空間上の対象点 \mathbf{Q} を、点 $\mathbf{P}_1(X_1, Y_1, Z_1), \mathbf{P}_2(X_2, Y_2, Z_2)$ に設置した 2 台のカメラで撮影して、光学的に点 \mathbf{Q} の空間座標 (X, Y, Z) を計算する方法を考える。ここでは、三次元空間 (現実空間) の変数を大文字、写真で撮影した画面の二次元空間 (写真空間) の変数を小文字で表現し、以降添字 1, 2 はそれぞれ $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ に設置

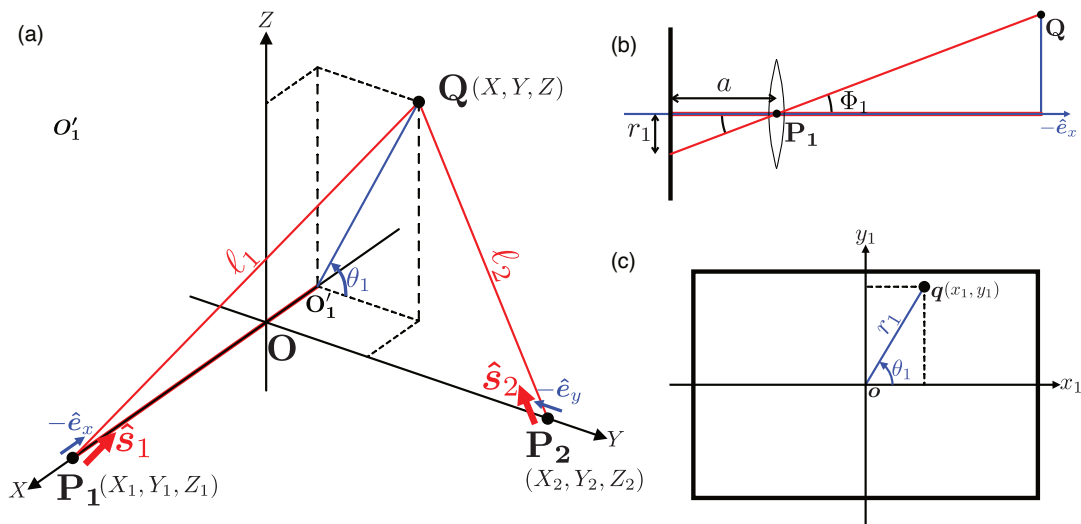


図 2.9 計測点 Q とカメラ P_1, P_2 の位置関係。ここではそれぞれのカメラの向きが、 P_1 のカメラが $-\hat{e}_x$ 、 P_2 のカメラが $-\hat{e}_y$ とした場合について考える。

されたカメラから取得できる情報であるとする。

まず、図 2.9(c) に示したように、 P_1 で $(-1, 0, 0)$ の方向に視線を向けるカメラから撮影した写真より、写真空間での対象点 q の座標情報 (x_1, y_1) を得られる。カメラの構造を理想的な単レンズ (ピンホール) 構造と考えて、図 2.9(b) のように、視線軸はレンズの中心と撮像素子の中心を通り、かつ撮像素子に直交しているものと仮定する。多くのデジタルカメラでは複レンズ構成となっているためこの図は正確ではないが、対称点側から複数のレンズに入射する光線の角度と、撮像素子側へ出射する光線の角度にのみ注目すれば、付録 B.1 で説明する見かけの焦点距離 a を使って単レンズと同じ議論ができる。ただし、カメラの外見からレンズの中心に対応する点を正確に把握することは難しいので、実際の測定においてはキャリブレーションなどで既知の大きさのオブジェクトを測定して、見かけ上の点 P の座標を得る必要がある。

写真空間で、点 q を極座標表示すると、 $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ 、 $\theta_1 = \text{atan2}(y_1, x_1)$ と表示でき、 θ は現実空間で $\overline{O_1P}$ と XY 平面とのなす角度である。ここで “atan2” は、FORTRAN を筆頭に多くのプログラミング言語で使用される関数で、直交座標を極座標に変換するとき余計な条件分岐を記述しなくてよい関数である。また、 r_1 は撮像素子上の写真空間内の見かけの距離であり、写真空間から測定した見かけの焦点距離 a (付録 B.1 の式 (B.1)) がわかれば、視線軸と \overrightarrow{OQ} とのなす角度が $\Phi_1 = \tan^{-1}(r_1/a)$ として特定できる。

以上のことから、点 \mathbf{P}_1 のから対象点 \mathbf{Q} へ向う方向単位ベクトルは、 $\hat{s}_1 = (-\cos \Phi_1, \sin \Phi_1 \cos \theta_1, \sin \Phi_1 \sin \theta_1)$ と書ける。同様に点 \mathbf{P}_2 カメラの写真空間から (x_2, y_2) が得られるので、点 \mathbf{P}_2 のから対象点 \mathbf{Q} へ向う方向単位ベクトルは、 $\hat{s}_2 = (-\sin \Phi_2 \cos \Theta_2, -\cos \Phi_2, \sin \Phi_2 \sin \theta_2)$ となる。媒介変数 t_1, t_2 を導入すると、直線 l_1, l_2 上に存在する点はそれぞれ次のように示せる。

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}}_{\alpha} + t_{\alpha} \hat{s}_{\alpha} \quad (2.1)$$

ここで α は 1 または 2 の添字である。点 \mathbf{Q} は l_1 と l_2 の交点であるため、 X, Y, Z の各成分ごとに等式を立てると、次の連立方程式が得られる。

$$X_1 - t_1 \cos \Phi_1 = X_2 - t_2 \sin \Phi_2 \cos \theta_2 \quad (2.2)$$

$$Y_1 + t_1 \sin \Phi_1 \cos \theta_1 = Y_2 - t_2 \cos \Phi_2 \quad (2.3)$$

$$Z_1 + t_1 \sin \Phi_1 \sin \theta_1 = Z_2 + t_2 \sin \Phi_2 \sin \theta_2 \quad (2.4)$$

今、カメラの設置位置の条件を、 $Y_1 = X_2 = 0, Z_1 = Z_2 = 0$ 、そして $d = X_1 = Y_2$ とおくと、未知数は t_1, t_2, d と考えることができる。しかし、この連立方程式は同次形の方程式なので、未知数は 2 つまでしか許容されない。例えば $z_1 = z_2 - \Delta = 0$ とすれば同次形を解消でき未知数が 3 つでも解くことができるが、実験のセッティング上、2 台のカメラの Z 位置座標を精度良く Δ だけずらすことは技術的に難しく、後述の測定特異点の問題を解決できるわけでもないので、未知数を t_1, t_2 の 2 つのみとして連立方程式を解きたい。ここで原点とカメラのレンズ中心間距離 d について考えると、 d はカメラのレンズ中心の位置に依存しており、複数レンズ構成のデジタルカメラではレンズ中心を決定できないため、本来ならば未知数にしたい。ただ、 d は式 (2.2), (2.3) の両辺にかかる係数で、その正体は 2 つの対象点間の現実空間内での距離を決定するスケールの変数であるため、大きさを考えない場合、例えばシェルの曲率分布の大小のみを測定したい場合などは $d = 1$ として計算して問題はない。 Δ と d は現実空間での長さの情報であるので、 Δ を導入せずに未知数を 2 つにして、 d を既知パラメータとするには、既知の大きさの (スケーラー) を測定するキャリブレーションを行なうことで、逆算して d を決定することができる。本実験では、このスケーラーによるキャリブレーションで d を決定した。

$\sin \Phi_2 \sin \theta_2 \neq 0$ 、つまり、 n を整数として、

$$\Phi_2 \neq n\pi, \quad \text{かつ} \quad \theta_2 \neq n\pi \quad (2.5)$$

を仮定すると、式 (A.63) より、

$$t_2 = t_1 \frac{\sin \Phi_1 \sin \theta_1}{\sin \Phi_2 \sin \theta_2} \quad (2.6)$$

であるため、これを式 (2.2) に代入すると、

$$d - t_1 \cos \Phi_1 = -t_1 \frac{\sin \Phi_1 \sin \theta_1}{\sin \Phi_2 \sin \theta_2} \sin \Phi_2 \cos \theta_2 \quad (2.7)$$

となり、さらに、

$$\cos \Phi_1 - \sin \Phi_1 \sin \theta_1 / \tan \theta_2 \neq 0 \quad (2.8)$$

を仮定すると、

$$t_1 = \frac{d}{\cos \Phi_1 - \sin \Phi_1 \sin \theta_1 / \tan \theta_2} \quad (2.9)$$

が得られる。

式 (2.5) の仮定は、 Φ の定義と併せて考えると、 \mathbf{P}_2 の写真空間の x_2 軸上 ($y_2 = 0$) に対象点 \mathbf{q} がある場合を除外している。カメラの設置位置の条件で $Z_1 = Z_2$ の場合、 $y_2 = 0$ ならば $y_1 = 0$ となるため、式 (2.6) を t_1 についての式にしても結局発散してしまうので、このカメラの設置条件では $y = 0$ 付近が特異点となり、測定精度が悪くなる。更に式 (2.8) の仮定を満たさない場合についても、パラメータを広範囲に変化させ、カメラの画角は高々 30° 程度だとして、この範囲では $\theta_\alpha \approx 0^\circ, 180^\circ$ に近い場合に特異点が写真空間に出現するという結果が得られた。以上のことから、 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ の両方の写真空間で、撮影において x 軸付近に対象点 \mathbf{q} が存在しないように工夫する必要がある。

これらのことを考慮して、 $\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$ は、カメラで撮影した対象点の角度情報 $\Phi_1, \theta_1, \theta_2$ とスケールの定数 d を用いて次のように算出した。

$$\overrightarrow{\mathbf{OQ}} = \begin{pmatrix} d - t_1 \cos \Phi_1 \\ t_1 \sin \Phi_1 \cos \theta_1 \\ t_1 \sin \Phi_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

2.3.6 有限要素法シミュレーション

数値解析ソフト ABAQUS(Dassault Systemès) によって紙ばねの伸展時の各面の形状変化と、両端にかかる弾性力を数値解析的に計算した。Abaqus は有限要素法による構造解析ツールで、工業や企業開発で世界的に採用されているソフトウェアである。構造を微小な要素に分割し、各要素周辺で力のつり合いとトルクつり合いを計算する。要素の形状は三角系要素を採用し、弾性シェルモデルを設定した。薄膜の条件では、小さな応力に対

してひずみが厚み方向に小さく局在するため、構成関係式ではフックの線形法則が十分成り立つ。ただし各微小要素のひずみは小さくても、要素の剛体回転により全体の変位は大きくなる可能性があった。そのため幾何学的な非線形性まで考慮された計算を実行した。シェルは完全な2次元平面ではなく、厚み方向にも要素を区切って変形を再現した。要素のサイズを変化させたいくつかの計算を繰り返し、結果の収束性も確認した。

各面の接続は自由回転できる条件で、厚みは $t/a = 0.005, 0.01, 0.02$ の3種、周期は $N = 6$ で計算した。端面だけは常に平面を保ち伸長軸周りで自由回転を許す条件を与え、端面の変位に対する端面のねじれ回転角度と端面にかかる圧力を出力した。図 2.10 にシミュレーションで出力した変形の様子を示す。

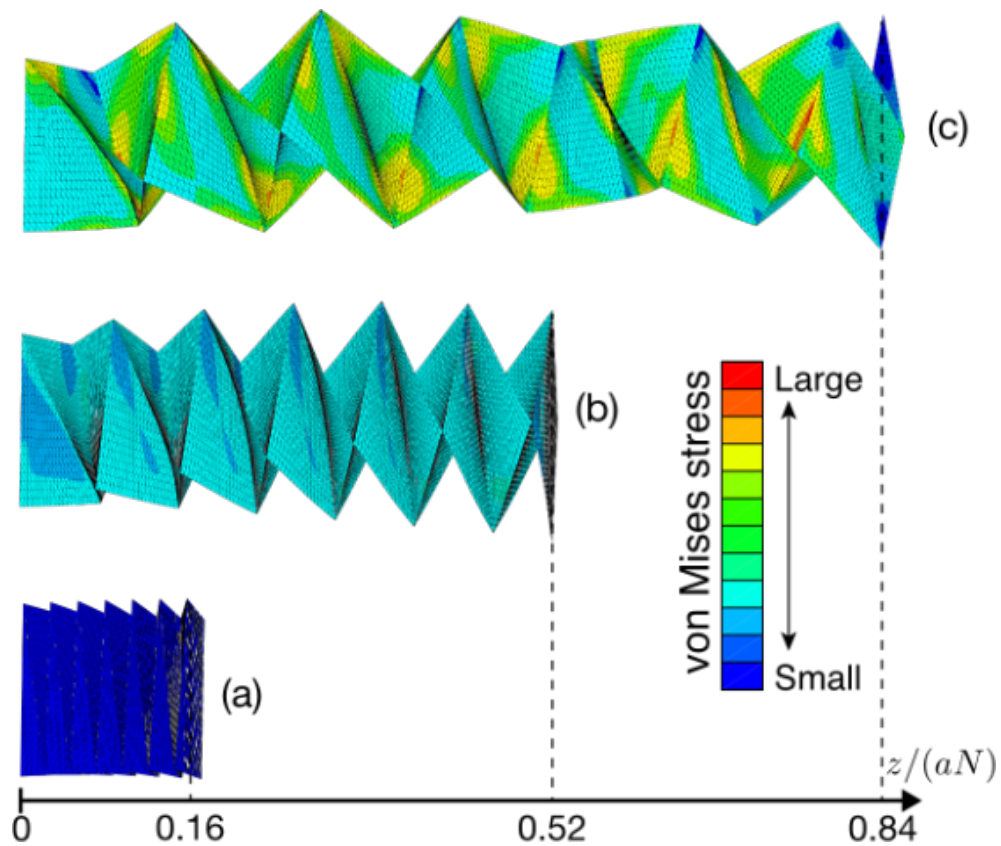


図 2.10 $z/(aN) = (a)0.16, (b)0.52, (c)0.84$ となるそれぞれの伸長量における紙ばねの形状を ABAQUS で計算した図。カラーマップは von Mises stress と呼ばれる面内応力の分布を出力している。von Mises 応力 σ_{eqv} は、 x, y, z 方向の垂直応力 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ と、せん断応力 $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$ を用いて、
$$\sigma_{\text{eqv}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)]}$$
 で表記できるスカラー量であり、材料工学において破壊の指標として用いられることが多い。

2.4 結果

2.4.1 伸展した紙ばねの三次元形状計測とシミュレーションの形状計算

伸張量が $z/(aN) = 0.625$ ($z = 150$ mm, $a = 40$ mm, $N = 6$) の模型を 3D キャプチャーした測定点と Abaqus による数値計算の結果を図 2.11(b) に重ねて示した。両者には良い一致が見られた。このことから、シミュレーションは現実の紙ばねの変形をよく再現できていると判断した。また数値解析において $z/(aN) = 0.83$ のときの計算結果で、2本の帯それぞれを赤と青に着色して図 2.11(a) に表示した。ここから一つの面を抜き出して、ガウス曲率と平均曲率をそれぞれ計算した [50](図 2.11(c),(d))。

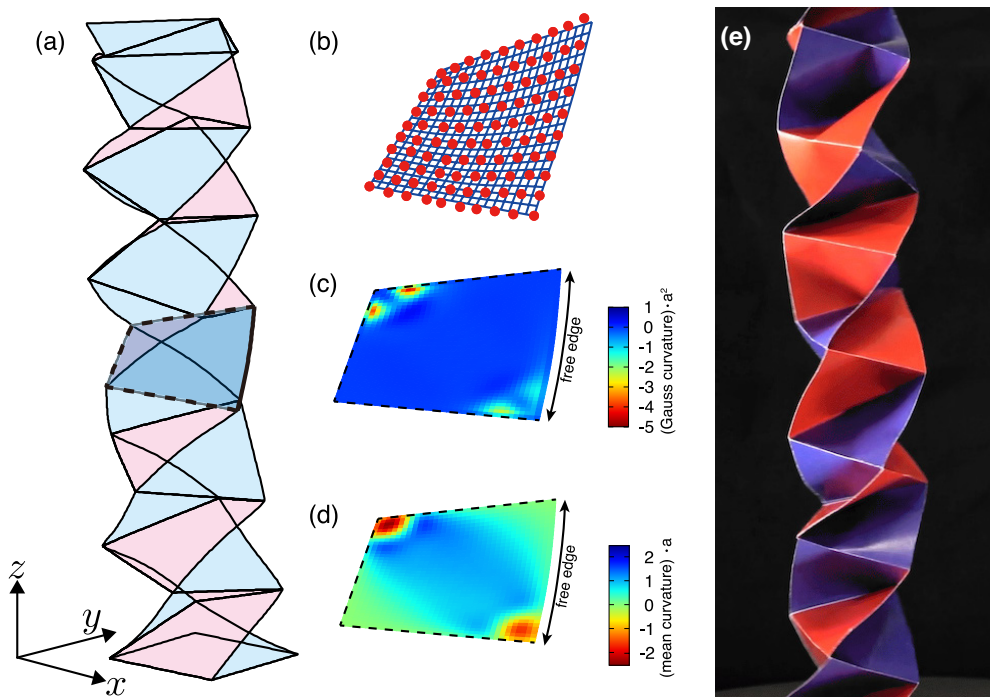


図 2.11 (a)1 周期あたりの伸張量 $z/(aN) = 0.83$ の数値計算結果。そのうち青に着色した帯の 7 番目の面を抜き出してそのガウス曲率と平均曲率の分布を計算し、それぞれ (c),(d) に示す。(b) は $z/(aN) = 0.625$ のときの 3D キャプチャーの測定点 (赤)100 点と、数値計算の結果線 (青) を重ねて示している。(e) 赤と青の紙帯で作成した実際の紙ばね。

2.4.2 伸びに対するねじれ

ねじれ角度 Φ の測定結果、および数値解析の計算結果は、1 周期あたりの一辺長 a で規格化した伸長量 $z/(aN)$ に対する、1 周期あたりのねじれ角度 Φ/N として図 2.12 に示した。この規格化は 2.5.1 で詳しく議論する式 (2.17) に基づいており、全てのデータはよく一致した。theory の黒実線もこの式による。伸長量 $z/(aN) = 0.16, 0.52, 0.84$ それぞれのときの紙ばねの様子を、図 2.12(a),(b),(c) に示した。ただし伸長量が大きい領域では、実験測定と数値計算結果の間に若干の差が生じている。

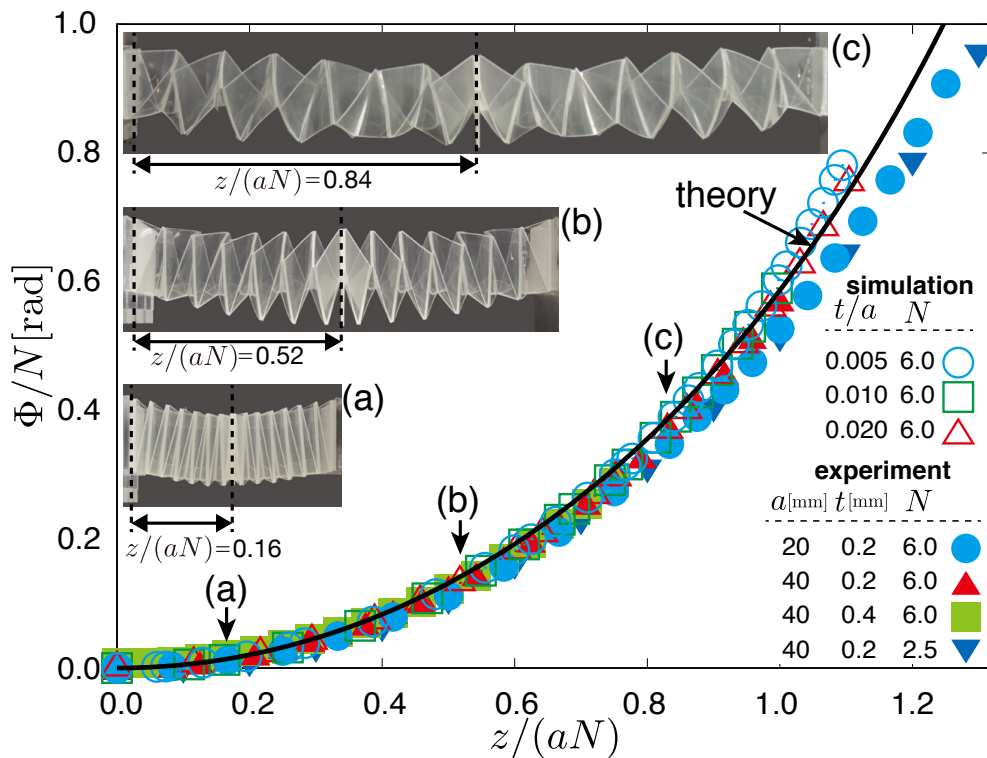


図 2.12 正方形一辺の長さでスケールした 1 周期あたりの伸長 $z/(aN)$ に対する 1 周期のねじれ角度 Φ/N の測定結果。(a),(b),(c) はそれぞれ、 $z/(aN) = 0.16, 0.52, 0.84$ ($a = 40\text{mm}, t = 0.4\text{mm}, N = 6$) の紙ばねの写真。実線は 2.5.1 章で議論する理論に基づく。

2.4.3 伸びに対する復元力

紙ばねの弾性力の測定結果、および数値解析の計算結果は、伸長量 $z/(aN)$ を横軸にとって図 2.13 に示した。ここで縦軸は終端面の圧力 F/a^2 をヤング率 $E = 3.4 \text{ GPa}$ と $(t/a)^{9/4}$ で割った量で、各データはスケールした。また伸長量が十分小さい領域における弾性力の線形性を見るために $z/(aN) < 0.3$ の拡大グラフを図 2.14(a) に示し、線形領域のグラフの傾き K_s が、厚みと一辺長の比 t/a へどう依存するかを図 2.14(b) に表した。変位が微小な状態では弾性力にはフックの線形関係が見られ、その比例定数を K_s としてグラフに表している。

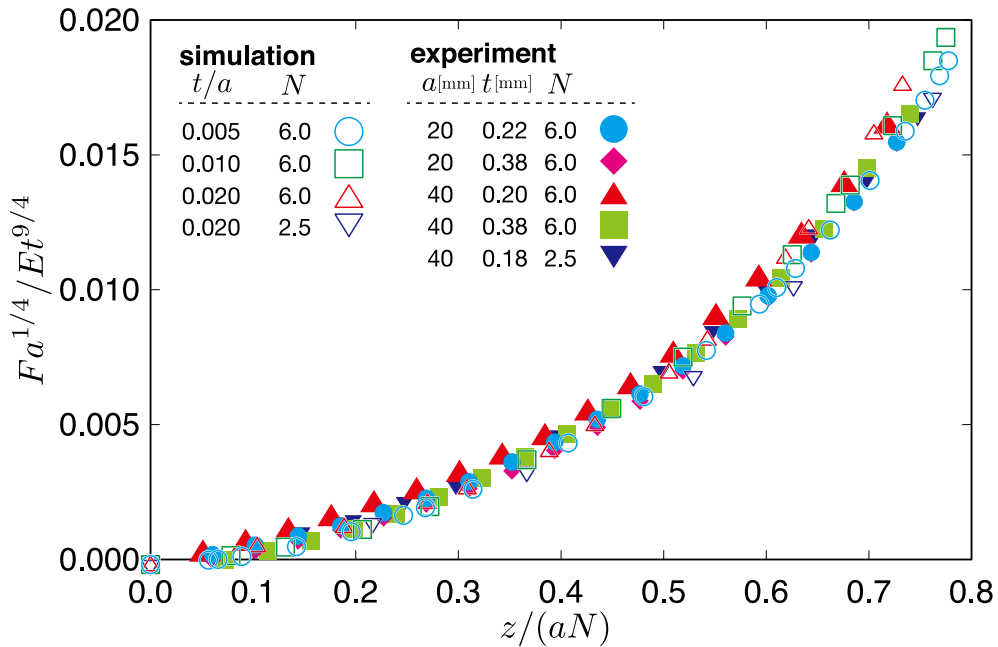


図 2.13 伸長の全域での弾性力測定結果と数値解析結果。式 (2.21) よりリスケールして示しており、厚さに対して $t^{9/4}$ でスケールする。ここでは最もよく一致するように、ヤング率を測定誤差範囲内の $E = 3.0 \text{ GPa}$ として表示している。

2.4.4 シート 1 枚の曲げ弾性力

切り出した正方形シートを曲げたときの、垂直方向面外変形を変形の最大値 (対角線の半分の長さ) で規格化した $2u/(a\sqrt{2})$ に対する、測定弾性力 F を厚み t の 3 乗で規格化したグラフを図 2.15 に示す。

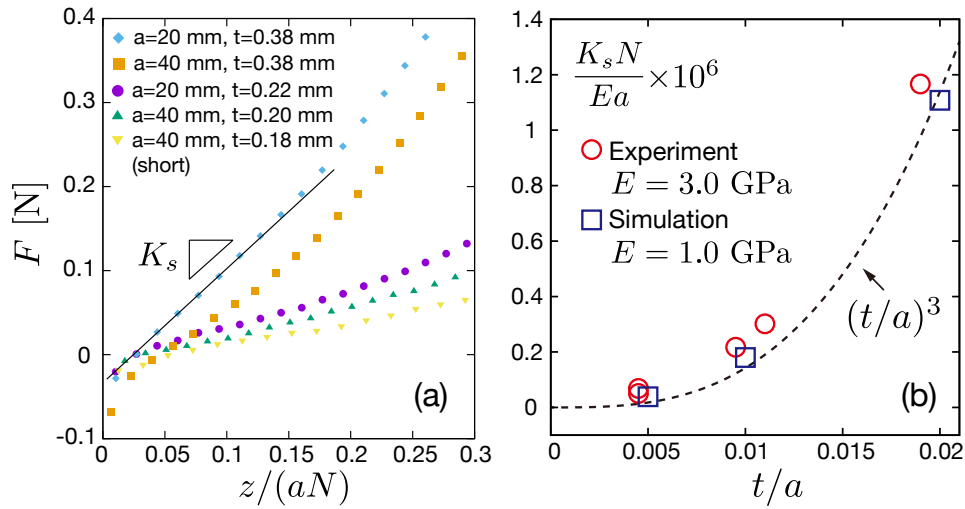


図 2.14 弾性力測定結果と数値解析結果。(a) 初期伸長領域における弾性力変化の測定結果。フック則が成り立つ線形領域がみえる。(b) 線形領域における弾性力グラフの傾き。線形領域では t^3 でスケールすることがわかる。

2.5 考察

2.5.1 ねじれの幾何学

面の曲げ変形による力学的な特性はシートの厚さに依存するが、紙ばねのねじれ角度の測定結果 (図 2.12) よりねじれ角度 Φ は厚さに依存しないため、幾何学のみで議論して紙ばねのねじれを考察する。折り目螺旋の幾何構造に注目すると、折り目は面に対して十分硬くばねの伸展時も自由境界辺と比較して直線を維持している (図 2.3)。これは折り目部分が 3 つの正方形面の辺が接する構造のため、厚さ 3 倍の剛性があることに起因する。このことから折り目直線と仮定し、端から順に i 番目の折り目をベクトル \vec{q}_i で考える (図 2.16(a)) ものとする。折り目螺旋構造から条件が 2 つ導ける。

まず 1 つ目の条件は、任意のヒンジベクトルと伸び方向軸とのなす角度は一定であることである。この条件は、ヒンジ螺旋と一般的なコイル状のバネとの対応において、ヒンジの角度がピッチ角に相当することを考えると理解しやすい。各折り目ベクトルと伸長方向 \hat{e}_z の法線面がなす角度が θ [rad] であるとすると、

$$\vec{q}_i \cdot \hat{e}_z = a \sin \theta \quad (2.11)$$

とかける。

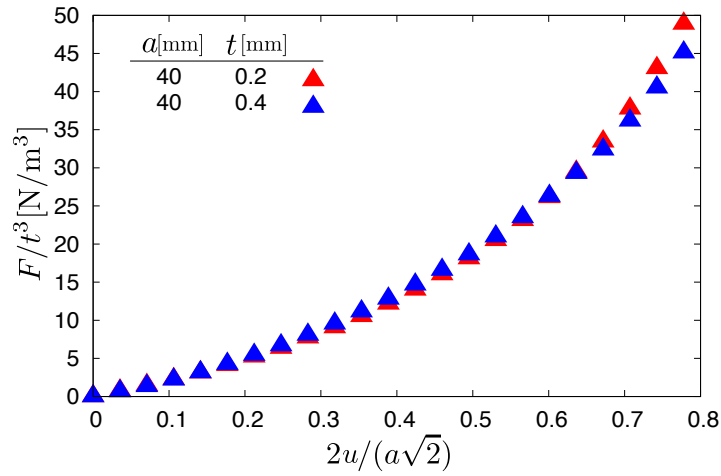


図 2.15 正方形面一枚の曲げ弾性測定結果。横軸は面外鉛直方向の変位 u を面の対角線の長さの半分 $2u/(a\sqrt{2})$ で規格化した量で、縦軸は測定した弾性力 F を厚み t の 3 乗で規格化した量である。厚みは $t = 0.2 \text{ mm}$, 0.4 mm で検証して、両者には良い一致が見られるので、切り出した正方形面の一枚曲げにおいては、確かに曲げ変形が支配的であると言える。

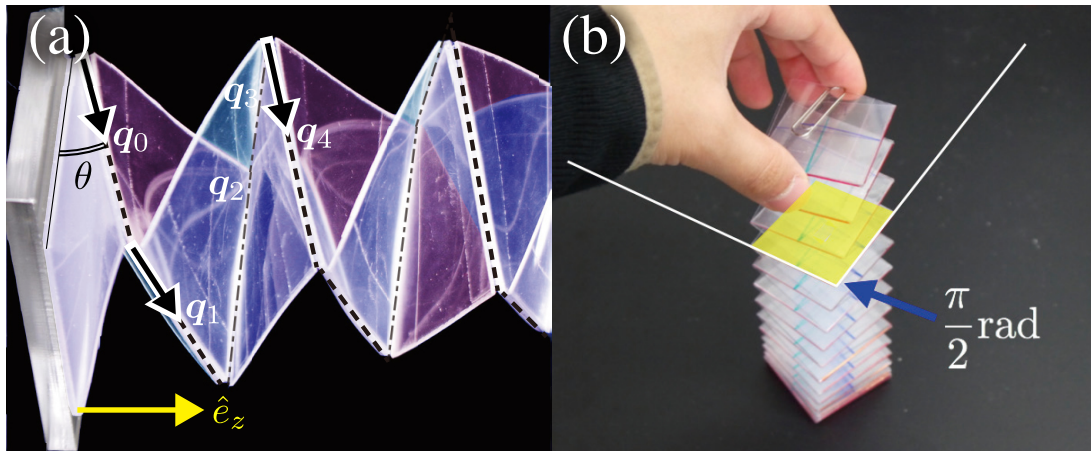


図 2.16 (a) 直線的な折り目部分を、それぞれベクトル \vec{q}_i で表し、 \vec{q}_i と伸展軸 \hat{e}_z の法平面がなす角度を θ とする。(b) 隣り合う折り目ベクトルは、正方形面内の隣り合う 2 辺に該当するので、一定の伸展状態でも $\vec{q}_i \cdot \vec{q}_{i+1} \cong 0$ は成り立つ。

2 つ目の条件は、隣り合うヒンジベクトルは直交することである。 $z = 0 \text{ mm}$ の状態で隣り合うヒンジは正方形面の隣り合う 2 辺であるから、なす角度は $\pi/2 \text{ rad}$ である。伸びている状態においても正方形面の 2 辺であることは変わらない。ただし伸長が大きい状態では各面は曲面になっており、幾何的な拘束からなす角度が顕著に $\pi/2 \text{ rad}$ 以下になる

ヒンジ組も存在している。伸びが十分小さい範囲では面の変形も小さいので、なす角度を $\pi/2$ rad と近似できる (図 2.16(b))。このことから次の条件が導ける。

$$\vec{q}_i \cdot \vec{q}_{i+1} = 0 \quad (2.12)$$

折り目ベクトルは極座標表示で

$$\vec{q}_i = a(\cos \phi_i \cos \theta, \sin \phi_i \cos \theta, \sin \theta) \quad (2.13)$$

とおける。式 (2.11), (2.12) の条件から、 $\phi_{i+1} - \phi_i = \cos^{-1}(-\tan^2 \theta)$ となる。螺旋は折り目 4 つで 1 周期なので、1 周期でのねじれ角度は

$$\phi_{i+4} - \phi_i - 2\pi = 4(\phi_{i+1} - \phi_i) - 2\pi \quad (2.14)$$

である。紙ばね全体で N 周期あるので、全体のねじれ角度は

$$\Phi = 4N \sin^{-1}(\tan^2 \theta) \quad (2.15)$$

となる。一方で伸長方向には

$$z = 4aN \sin \theta \quad (2.16)$$

とかける。以上から θ を消去して、

$$\frac{\Phi(z)}{N} = 4 \sin^{-1} \left[\frac{z^2}{(4aN)^2 - z^2} \right] \quad (2.17)$$

が導かれ、これを theory 曲線として図 2.12 に示した。ただし、ここで示した曲線は式 (2.17) の一辺長 a を実効的な一辺長 $a^* = 0.73a$ に置き換えている。すると theory 曲線は実験値、数値解析値によく一致する。この補正は同じ伸長量で見ると、全体のねじれ角度を大きくする効果となっている。

実効的に一辺長が変化する理由は明らかになっていない。考えられる理由として、実際の伸展において仮定した 2 つの条件が満たされない可能性が挙げられた。まず 1 つ目の条件式 (2.11) の $\vec{q}_i \cdot \hat{e}_z = a \sin \theta$ を厳密に満たさない可能性を考える。そこで数値解析で各折り目辺の角度 θ_i を計算すると、確かに一定値ではないことがわかった (図 2.17)。 θ_i は一定の値 Θ 周りに極大極小の差が 2 倍ほどの値で振動しており、 Θ は伸長が大きくなればなるほど大きくなってその振幅も大きくなり、仮定した条件のように θ_i は一定にはならない。 θ_i を平均化すると Θ となってしまうので、図 2.17 の結果から $\Theta (= \sum_i^{4N} \theta_i / 4N)$ を計算して任意の i で $\theta_i = \Theta$ と近似して理論に取り入れても、実効的な一辺長 $a^* = 0.73$

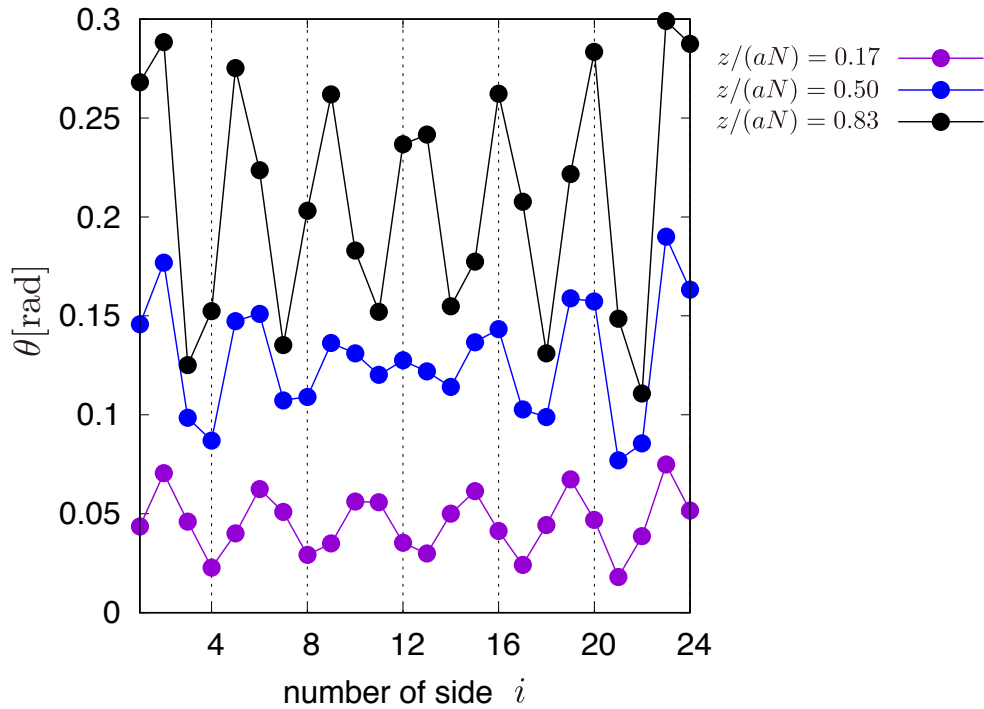


図 2.17 3つの伸長量： $z/(aN) = 0.17, 0.50, 0.83$ において、それぞれのヒンジ \vec{q}_i と伸長軸 \hat{e}_z の法平面とのなす角 θ を数値シミュレーションで計算したグラフ。 θ のばらつきは伸長に対して単調に増加する。

の関係はなくならなかった。このことから、折り目ベクトルの角度が一定である条件は妥当であるといえる。

次に2つ目の条件式 (2.12) の $\vec{q}_i \cdot \vec{q}_{i+1} = 0$ が満たされない可能性を考える。同様に数値解析で i 番目と $i+1$ 番目の折り目ベクトルのなす角度を計算したところ、図 2.18 が得られた。こちらも角度は想定していた 90° から少しずつずれている折り目の組みがあった。1/2 の頻度で、角度が 90° から鋭角側にずれる。ずれ角度は身長量最大の $z/(aN) = 0.833$ でも平均してせいぜい $3^\circ \simeq 0.05 \text{ rad}$ 程度である。これは紙ばね全体のねじれをより大きくする効果であり、実効的な一辺長の補正を考慮する要因にはなっていると思われるが、これだけの原因と言えるほどずれ角度は大きくなかった。

2.5.2 復元力とシート厚

数値解析結果 (図 2.10(a)) からわかるように、変形が十分小さい範囲では面内の応力も小さい。1.4.1 章での議論より、面の厚み $t \ll 1$ の極限では引っ張り変形に比べて曲げ

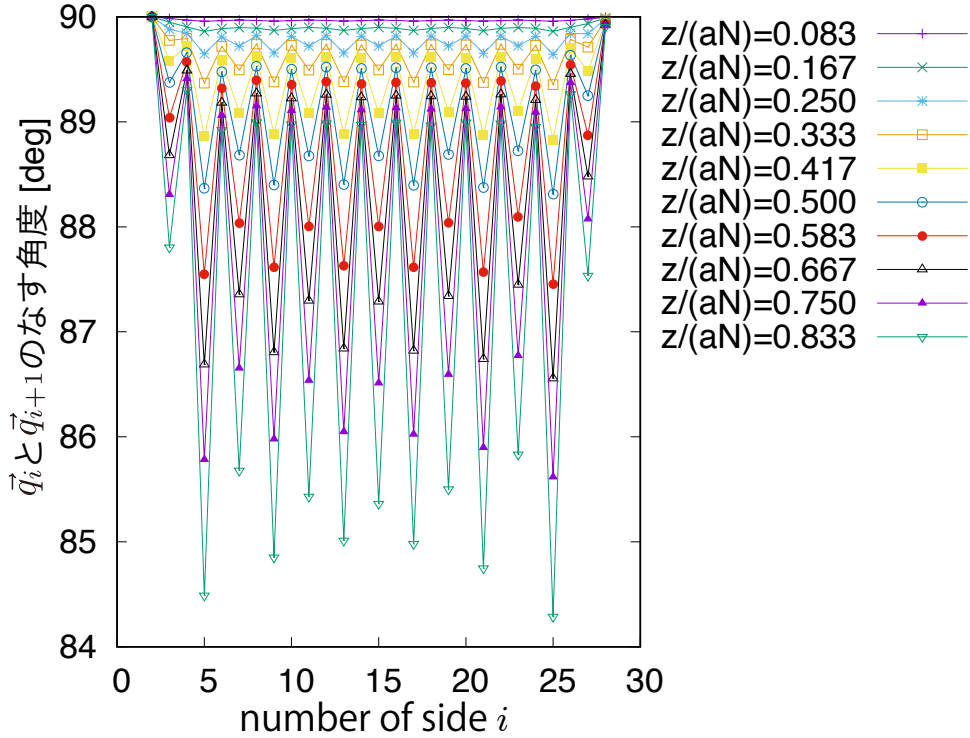


図 2.18 それぞれの伸長量の時に、折り目ベクトル \vec{q}_i と \vec{q}_{i+1} のなす角度を数値シミュレーションで計算したグラフ。伸長 z の増加に伴い式 (2.12) で仮定した 90° からのずれも単調に増加するが、紙ばね全体で平均すると高々 3° 程度の誤差であり、式 (2.17) と実験結果との差が 0.73 倍になることは説明できない。

変形の方がエネルギー的に有利になるので、紙ばねも少なくとも伸長 z が十分小さい領域であれば、曲げの弾性変形効果のみが顕在化すると仮定できる。紙ばねの全ての面が同じ変形だとすると、ばねの伸長はおおよそ $z \sim 2Nu$ とおける。ここで u は各面の面外変位とする。曲げが正方形面の対角線方向に一様であるとする、曲率は $\kappa = u/2a^2$ である。曲げのエネルギー \mathcal{E}_b は、紙ばねが帯 2 本の並列接続と考えて、ポアソン比 ν 、曲げ剛性 $B = Et^3 / [12(1 - \nu^2)]$ を用いると、

$$\mathcal{E}_b \sim B\kappa^2 a^2 \times 2N \sim 2NBu^2/a^2 \quad (2.18)$$

と表せる。このエネルギーの表式を伸長 z で偏微分することで弾性力

$$F = K_s z \quad (2.19)$$

が得られる。ここで比例係数 K_s は、

$$K_s = \frac{1}{12} \frac{Et^3}{(1 - \nu^2) a^2 N} \quad (2.20)$$

図 2.14(a) は伸長が十分小さい範囲の実験測定した弾性力 $F(N)$ を示している。この範囲では傾き K_s で線形的に弾性力が増加する領域が見える。図 2.14(b) は横軸を t/a にとって、実験と数値シミュレーションの微小伸長のときの傾き K_s を示した。 K_s の表式を変形して、 $NK_s/Ea \sim (1-\nu^2)^{-1} / (t/a)^3$ と表せるので、これを図 2.14(b) に点線で重ねた。測定、数値計算のどちらの結果にもよく一致していることがわかる。伸長初期では、曲げ変形が支配的であるとする仮定に矛盾はなく、弾性力は厚みの 3 乗 (t^3) に依存していることがわかった。

ただし伸長が大きい領域では様相が変わる。面の変形は曲げだけではなく引っ張りの効果も大きくなるため、 $F \sim Et^3$ のスケーリング則は成り立たない。引っ張りの弾性力は厚みに比例して大きくなるので、紙ばね全体では厚みに依存する $t - t^3$ の間でスケールすると予想した。シェル弾性論において、曲げと引っ張りの競合によって弾性力が $t^{3-\gamma} (\gamma < 1)$ に依存する現象は一般的によくある [46]。右辺に $z/(aN)$ をあらわに入れて、次のような弾性力スケーリングの関係式を想定した。

$$F = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{Et^{3-\gamma}}{a^{1-\gamma}} \left(\frac{z}{aN} \right) \quad (2.21)$$

曲げ弾性のみで考えられる表式から γ だけずれていることを表す。これを測定実験と数値解析の結果 (図 2.13) から $0 \leq z/(aN) < 0.8$ の範囲でフィッティングすると、 $\gamma = 3/4$ であった。このことから、

$$F \sim Et^{9/4}/a^{1/4} \quad (2.22)$$

の関係式が得られた。つまり紙ばね構造のばね弾性力は、構成面の厚みの $9/4$ 乗に比例することがわかった。紙ばねが純粋な面の曲げ変形によする弾性がはたらくなら $F \sim t^3$ となるはずである。実際には 2 本のじゃばら帯は相互に拘束し合うインターロッキング構造となっているため、 $F \sim t$ となる面内の圧縮の影響も現われた結果、紙ばねの系全体としては $F \sim t^{9/4}$ になっていると考えられる。

ここで、実験モデルの紙ばね作成方法を考え直すと、各正方形面はカッティングマシンの刃で切り出している。このとき切り口近くで面の厚みが変化した影響が、 $\gamma = 3/4$ に効いているかもしれない。このことを、正方形シート 1 枚の曲げ弾性力測定で検証する。正方形 1 枚の純粋な曲げ変形は、薄膜の弾性論 (式 (2.19), (2.20)) より厚みの 3 乗に比例することがわかっている。図 2.15 より、1 枚のシートは切り出しの工程で切り口の厚みが変わるので、このことが理想的な曲げ変形の力学に影響を及ぼす懸念があったが、薄膜弾性の理論通り変形反発力は t^3 に依存しており、広い範囲で曲げ変形のみが支配的であることは確認された。

2.5.3 合体紙ばねの応用

実験測定を通して利用し続けた合体紙ばねの構造であるが、紙ばねの伸長に対するねじれが一意に決まることから図 2.19 のような応用機構を提案する。紙ばねは伸縮とねじれに強い相関があるので、実験では両端面を並行に変位させ中央面のねじれを測定したが、両端面にねじれを加えることで直線的に動く中央部の正確な位置を制御することができる。これを利用すれば、回転の運動を直線の運動に変換できる機構として紙ばねを応用できる。

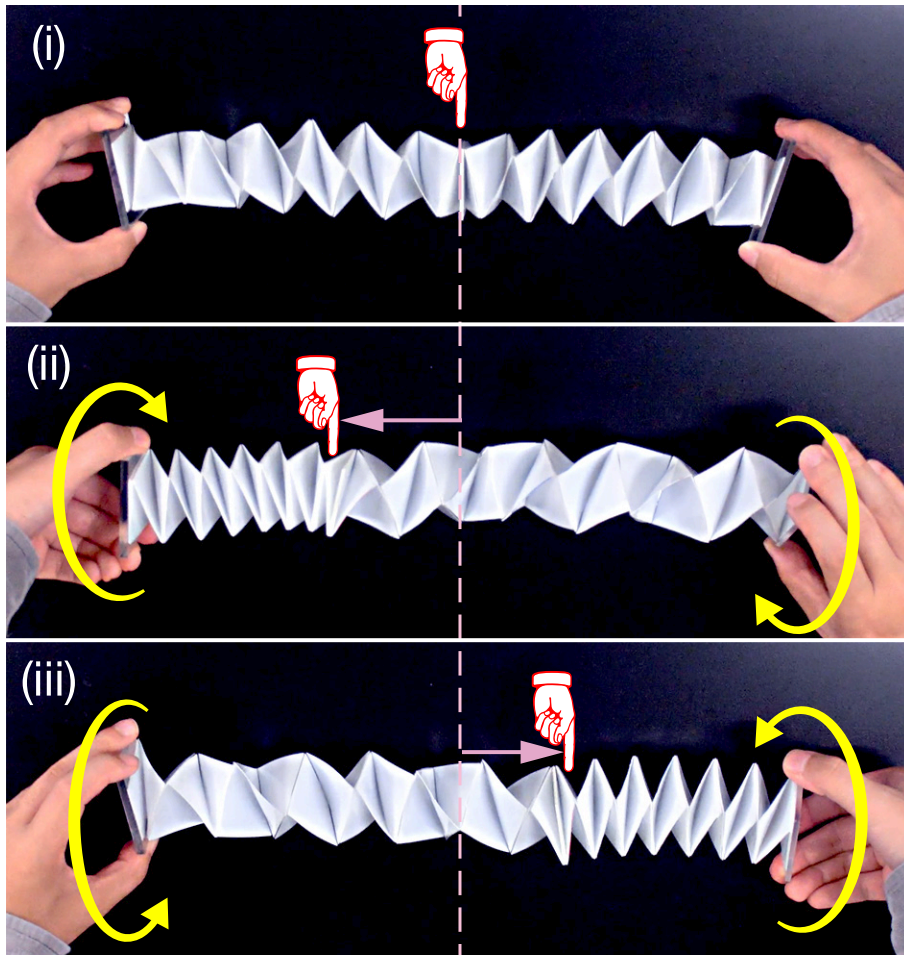


図 2.19 合体紙ばねは両端面を平行移動で伸長すると中央面がねじれるが、両端面にねじれを加えると中央面が一軸方向に移動する。この幾何学的な結合は相互変換できる。つまり並進と回転を変換することができる。

2.6 まとめ

正方形紙ばねは2本のじゃばら帯を組み合わせた構造で、初歩的な折り紙遊戯のひとつである。容易に作成できるため、是非とも自分で作成してその駆動力学応答を体感してもらいたい。じゃばらという最もシンプルな折り目のパターンを組み合わせたただけだが、いくつかの非自明な幾何と力学の性質が発現する。本研究では、まず幾何学的な紙ばねの伸びと全体のねじれとの強固な結び付きを明らかにし、直線の動きと回転を相互変換するシステムを提案した。幾何学的な伸縮とねじれの結合は、系の大きさに依存せずナノスケールからマクロスケールまで、カイラルな細長い構造の一般的な特徴である [51, 52]。例えば、図 2.20 に示すようなカイラルな円筒じゃばら (ねじり) 折り紙でも、紙ばね同様の駆動が実現できる。ただし、円筒じゃばら折りのように多くのシステムでは駆動によって欠陥が生じてしまう。カイラルな円筒じゃばらでは、面のたわみで折り目が移動して双安定性のある変形が可能なので、十分に伸展させると局所的に反転が起きて元の形状に復元できなくなる。これに対して本論文で議論した紙ばねは単安定構造で、他の多くの細いカイラルな構造よりも滑らかに駆動することができる。

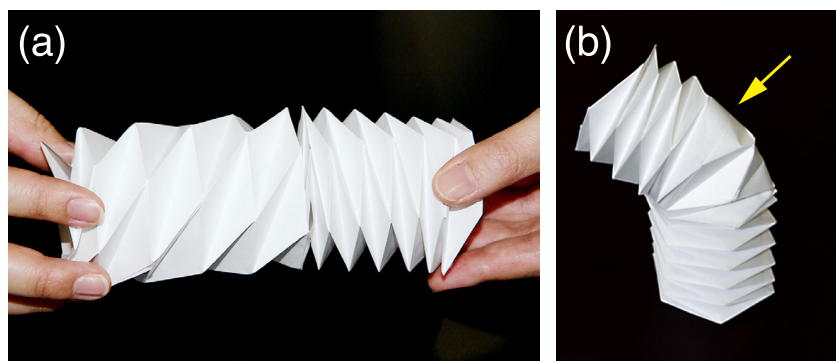


図 2.20 カイラルリティを持つ円筒じゃばら (ねじり) 折り紙の例。(a) 紙ばねではない他のカイラルな構造でも、右巻きと左巻きを接続し、両端の回転を直線的な運動に変換することができる。ただし、(b) 円筒じゃばら折りは面のたわみによって多安定であり、折り目が移動して矢印に示すような欠陥 (局所的な反転) が生じてしまうため、駆動範囲には大きな制限がある。

また、紙ばねの弾性力応答の起源についても注目し、紙ばねを構成するうちの1枚のシートの曲率形状を三次元的に計測し、厚さ t のシート1枚の曲げと紙ばねの全体の伸びとの関係を定量化し、弾性応答の起源を明らかにした。現段階においては、面の曲げと伸

縮の競合から、紙ばねの弾性力が厚さにどう依存するのか、より詳細な実験と数値計算による検証が必要となっている。紙ばねを利用したシステムの構築を考えると、正方形紙ばねの折り目パターンは他の一般的な折り紙のじゃばらよりも単純であるため、機械制御による自動製造に適している可能性があり、紙ばねの展開の力学特性も含めれば、将来的に機械的システムに伸びとねじれの駆動変換のためのユニークな手法を提供すると期待される。

第3章

Rotational Erection System (RES)

3.1 概要

近年では荷重で動作する切り紙構造を基礎にした様々なポップアップのデザインが研究されている [53–56]。また、3D プリンターなどの造形技術発展によって、メゾスコピックスケールにおける立体構造形成の技術も重要になっている。このような三次元のマイクロ構造は、主に基板の圧縮によって引き起こされる表面構造の座屈によって駆動するように設計されているものである [5]。そして、1.3.2 章で述べたように、折り紙と切り紙の性質をうまく組み合わせると、一枚の平面シートをたたむことなく立体化させ、かつ構造に双安定性を付与することができるようになる。このような折り切り紙構造は、新しい変形マテリアルをデザインするために注目を集めている [16, 57–64]。

Rotational erection system (RES) [65] は折り切り紙構造の一例で、平坦状態から回転を伴って起立する。RES はそのデザイン次第では、次の挙げるふたつの特徴を付与して設計することができる。ひとつ目は一般的な切り紙と同様に、切り目によって空隙が生じることで、横方向のサイズを維持したまま縦方向に立体化できることである。折り紙であれば、基本的には平面状態から駆動が進めば進むほど、折りたたまれた結果立体化したとしても面の広がりや歪みは失われてしまうが、RES であればシートの境界を固定されていても立体化することができる。ふたつ目は、起立した形状で外力がなくとも、そのまま安定して形状維持できる双安定性を発現させられることである。これは RES が折り紙と切り紙のハイブリット構造であることに起因する。例えば一般的な平面切り紙は、面の曲げによって変形するが、歪みによって大きな弾性の復元力が生じ、外力を除けば元の平坦状態に自発的に戻る単安定構造である。そして一般的な剛体折り紙は、変形は折り線に集中しており面は歪まず復元力はないので、折り線の弾性を除けば常時安定構造である。平坦

状態はもちろん安定形状だが、立ち上がった状態でも折り線部分に変形を局在化させ面の歪みを解消し、2番目の強い安定形状へ駆動することができる。RESの双安定の機能を制御・最適化するためには、RESの幾何学と力学を定量的に予測できるようにすることが重要である。

RESはカイラリティを持って回転しながら立体化するポップアップ構造の総称で、折り切りのパターンは、何回対称なのか、そもそも軸対称なのか、折り切り線は直線なのか否なのか、立ち上がりの角度が鋭角か直角か鈍角かなど、無限にデザイン空間が広がる構造である。本研究では、RESの中でも図3.1(a)に示す折り切り線パターンの3回対称RESから力学特性を扱う。このパターンの選定理由は、双安定性に注目して、明瞭な双安定性が得られ、対称の回数が少なく、シンプルな一軸の駆動ができるRESであったためである。この3回対称RESには、軸対称性があり、展開軸と回転軸が一致し、直角に立ち上がった状態で形状安定を示し、構成面がすべて平面となり折り目で接続されている。合成紙で作成した実際のRES模型を使った物理実験を実施し、同時に有限要素法解析によってRESの駆動を解析して、駆動の力学特性を定量的に調べた。

3.2 モデル：3回対称RESの構造

多重安定性のあるRESはいくつかあるが、ここで扱うのは双安定性が顕著に現われ比較的単純な、図3.1に示す3回対称のRESとする。以降、この3回対称RESを単にRESと表現する。平面に図3.1(a)のような折り目と切れ目を配置することで、回転しながら図3.1(b)のように面外 z 方向に立体化する構造である[65]。RESは図3.1(b)に示すようにHub、Tab、Arm、Baseの4パートから成り、平面の法線方向(z 軸)を回転軸として皿部と基部が相対的に回転し、腕部が立ち上がることで立体化する。このBaseに対するHubの相対回転角度を $\theta(\text{deg})$ で表わす。展開図の代表的な長さのパラメータとして、皿部の大きさ a と腕部の太さ b を設定する。平坦状態(図3.1(c)の $\theta \sim 0^\circ$)と起立状態(図3.1(c)の $\theta = 120^\circ$)のそれぞれの状態で面の歪みを解消して形状を維持できる安定状態になるが、その中間状態では特にArmに大きく曲げ変形を生じて、その復元力によって不安定な状態となる。各安定状態は、駆動を考えなければその形状を剛体平面で組み立てることが可能(折り紙的性質)だが、変形の途中は形状不安定な面の弾性変形(切り紙的性質)を伴わなければ実現しない多重安定な系である。面が剛体であると仮定すると、3.2.1章で詳しく説明する幾何的な自由度により駆動できない。また多くの多重安定系と同様に、ある程度駆動させると次の安定形状に瞬間的に自発駆動するスナップが顕著に現われる。この性質により、RESは起立状態で一定の荷重を支えることができる構造

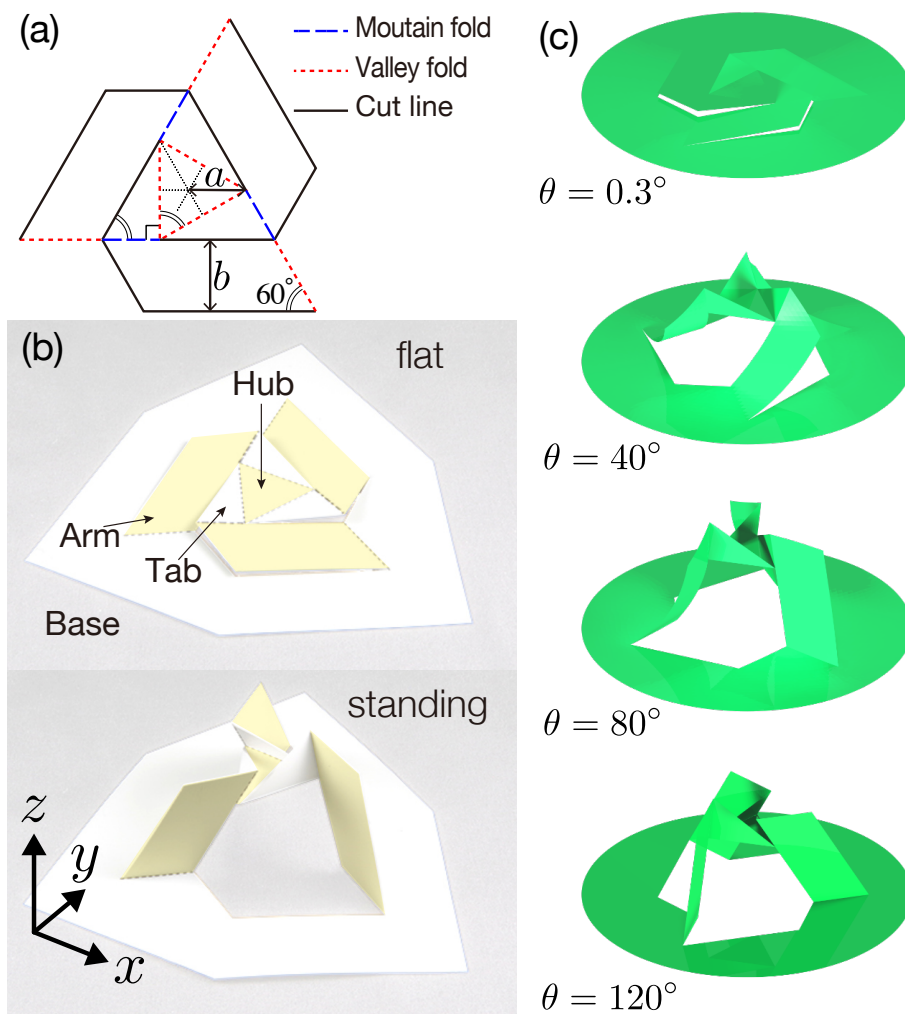


図 3.1 本研究で扱う 3 回対称 Rotational erection system (RES) の概形図。(a) ここで議論する 3 回対称 RES の作成に必要な折り切り線と、幾何構造を特徴付ける長さパラメータ a と b の定義を記す。(b) ほぼ平坦状態 (flat) と立ち上がった状態 (standing) の RES の写真。折り線に囲まれた面をひとつのパーツとして、中心から Hub(正三角形)、Tab(直角二等辺三角形)、Arm(平行四辺形)、Base と名称を定義する。立ち上がった状態では Arm は Base に対して直交する。(c) 有限要素法シミュレーションから作成した RES の変形途中の形状。Base に対する Hub の相対角度を θ として、平坦状態を $\theta = 0^\circ$ 、立ち上がった状態を $\theta = 120^\circ$ とする。

である。RES のねじれ駆動角度 θ は 0 - 120° の範囲で遷移できる。

3.2.1 剛体面 RES の駆動自由度

図 3.1(a) に示す RES はスナップ変形や双安定の性質を持つことから、構成面の曲げ変形が駆動に重要な要素となるが、剛体面で構成されていた場合、駆動は完全に不可能なのだろうか。ここでは一旦、各パーツが剛体面であると仮定して、構造力学の観点から駆動の自由度 (M) について考えたい。図 3.2 のように、まずは RES の Arm だけを抜き出して考える。今、Arm(灰色) が剛体面だとすると、Arm は Base との接続部分の折り目(ヒンジ)の軸まわりの回転の自由度 1 のみ許容され、Arm は 3 つあるので、系全体の自由度は 3 となる。Hub と Tab に含まれる各辺は両端間距離を一意に制限する拘束条件となるので、ここで Hub と Tab 含めて考えると、拘束条件となる辺(赤線)は 6 本あるので、結局 RES 系全体の自由度は

$$M = 3 - 6 = -3 \quad (3.1)$$

と負の値をとり、RES が剛体のまま駆動できないことを示す。

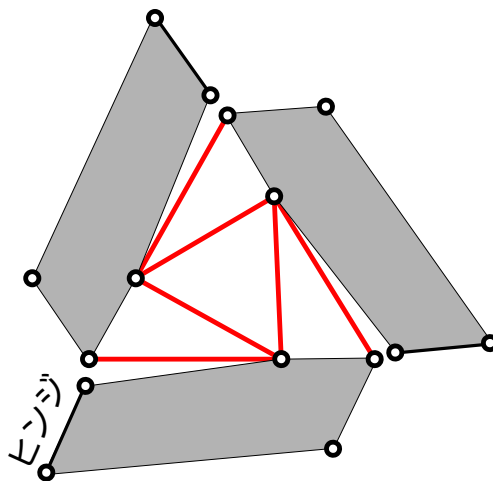


図 3.2 剛体 RES の模式図。ここで取り上げる 3 回対称 RES には、5 つのノードを持つ Arm パート(灰色)が 3 つある。3 つの各 Arm はヒンジで Base に接続するため、それぞれの Arm 単独の駆動自由度は 1 ずつである。そして、それらを接続する Hub と Tab パートは 6 本の拘束(赤色)で表現され、この拘束条件によって RES の自由度 M は 6 減って、全体で -3 となる。

式 (3.2) となることを別の視点からも考えるため、インデックス理論 [66, 67] も検討する。剛体折紙のトラスモデルでは、ノード(頂点)の数 N_V とボンドの数 N_B 、面の拘束

条件 N_C から次のように計算される。

$$M = 3N_V - (N_B + N_C) - 6 \quad (3.2)$$

ここでは、最後の項で系全体の剛体並進と回転の自由度 6 を差し引いている。一般に k 個のノードで囲まれたパーツが剛体面であるためには、 $2(k - 3)$ 本の対角線にボンドを追加すれば良い [68]。剛体面が N_F 個ある系では自由度は、

$$M = 3N_V - N_B - \sum_{N_F} 2(k - 3) - 6 \quad (3.3)$$

と書ける。この式を RES に適用するために、Base パートも含めて考える。Base の議論に必要な要素を抜き出すと図 3.3 のように六角形剛体面として考えることができる。これによって、

$$\begin{aligned} N_V &= 15 \\ N_B &= 21 + 3 = 24 \end{aligned} \quad (3.4)$$

となる。また三角形は既に剛体であるため、 $k \geq 4$ となる面の数は $N_F = 4$ である。Arm パートは $k = 5$ なので、剛体とみなすためにはそれぞれに $2 \times (5 - 3) = 4$ 個のボンドを追加する必要がある。Base パートも同様に $2 \times (6 - 3) = 6$ 個のボンドが追加されて剛体化する。つまり、面の拘束条件は、 $N_C = 12 + 6 = 18$ となる。これらを式 (3.2) に代入すると、

$$M = 3 \times 15 - 24 - 18 - 6 = -3 \quad (3.5)$$

を導くことができ、この結果は式 (3.1) の計算と一致することが確認できる。

この剛体面 RES の駆動自由度の議論から、RES が剛体面で駆動する、つまり自由度が正 ($M > 1$) になるためのデザイン修正を予測することができる。デザインの修正とは、自由度が増加する構造を追加することで、例えば適切な折り目 (ヒンジ) を付与することである。図 3.4 に示すように、RES の対称性を崩さないようにそれぞれの Arm パートの対角線に折り目を追加することを考えてみる。まずそれぞれの Arm に 1 本折り目を追加すると (図 3.4(a))、 $k = 5$ だった Arm の面は三角形と四角形 ($k = 4$) に分割されたことになる。これによって、

$$\begin{aligned} N_b &= 24 + 3 = 27 \\ N_C &= 6 + 3 \times 2(4 - 3) = 12 \end{aligned} \quad (3.6)$$

に変化するので、自由度は

$$M = 3 \times 15 - (27 + 12) - 6 = 0 \quad (3.7)$$

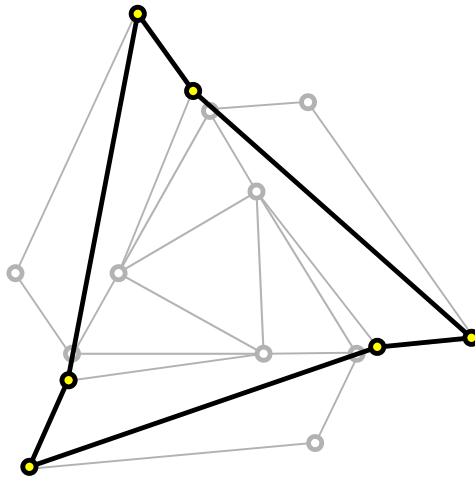


図 3.3 自由度の議論において、RES の Base パートは太黒線で示すような六角形剛体面と考えて差し支えない。

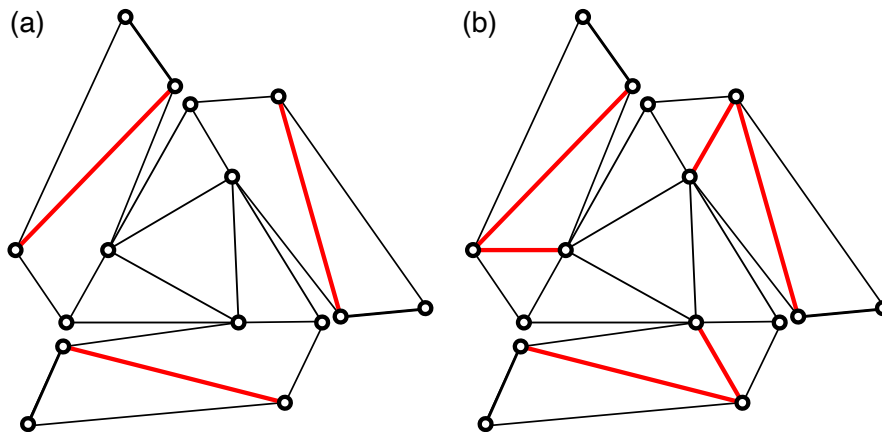


図 3.4 (a) 剛体 RES の Arm パートにそれぞれ 1 本ずつヒンジ (赤線) を追加すると駆動の自由度は 3 増加する。(b) 2 本ずつヒンジを追加すると自由度は 6 増加するので、剛体折紙構造の RES でも変形できるようになる。

となる。これでは自由度がゼロなので、まだ剛体折紙 RES は動けない。では更に折り目を追加したらどうだろうか。Arm パートの対角線に 2 本の折り目を追加すると (図 3.4(b))、Arm は 3 つの三角形に分割されたことになる。同じように考えて、このときの自由度は、

$$M = 3 \times 15 - (30 + 6) - 6 = 3 \quad (3.8)$$

となり、剛体折紙の RES は駆動できるようになる。このことは、3D プリンター (PLA 樹脂) によって作成された剛体 RES 模型で、実際に確認されている (図 3.6(a))。

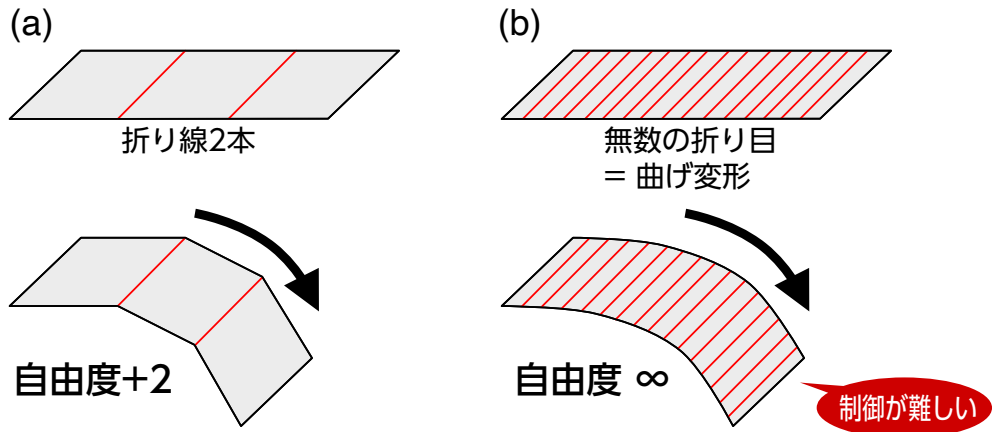


図 3.5 (a) 設計において折り線を 2 本追加する操作は、剛体折紙系の駆動自由度を 2 増加させることを意味する。(b) 面に曲げ変形を生じるということは、無限本の折り目を付与したことと同義なので、駆動自由度も無限に増加し、一般には制御することが困難なシステムとなってしまふ。

ここまでの議論で、適切な折り目を追加すると、図 3.5(a) のように系の自由度が折り目の本数分増加することがわかった。図 3.5(b) のように、面の連続的な曲げ変形を折り目で近似するならば、それは無限に折り目を付与したものとみなせるので、駆動の自由度は無限に増加してしまうことを意味し、これではシステムの駆動を制御することが一般には難しくなってしまう。しかし、ここで議論する 3 回対称 RES は、図 3.6(b) のように曲げ変形の復元力をうまく軸対称にはたらくようにデザインされているため、回転軸方向のみに強く制限され、Base 面と Hub 面が平行を保ったまま、 z 軸に沿ったコントロールが比較的容易な立体化を実現できている。

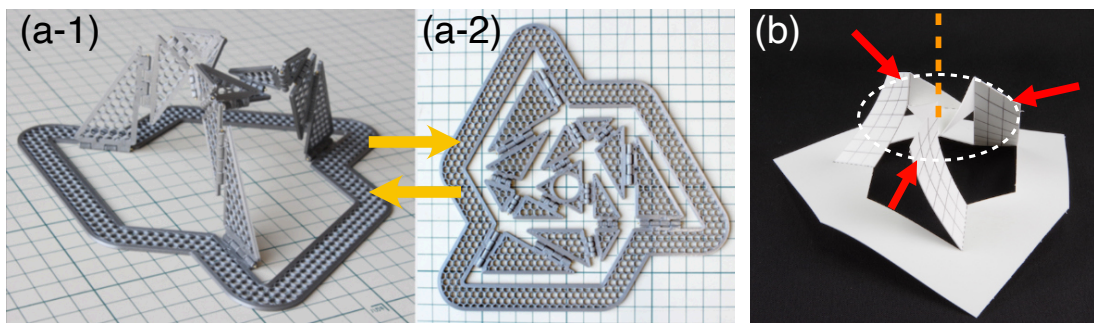


図 3.6 (a) 3D プリンターで形成された剛体的に駆動できる 3 回対称 RES の模型 [69]。(b) 面の曲げやたわみはシステムに無限の駆動自由度を与えるので、一般に制御が困難になるが、軸対称 RES は曲げ変形の復元力 (赤矢印) を軸対称になるよう適切に配置することで回転軸 (橙点線) に沿って一軸方向の立体化を実現している。

3.3 実験と数値シミュレーションの方法

RES はねじれながら面外方向へ立体化する。このねじれの回転と立体化の平行移動には、2章で説明した紙ばねほど強い幾何的な結合があるわけではないものの、ある程度強い相関関係がある。そのため RES を駆動させるには、回転による外トルクを与える方法と、平行移動の外力を加える方法がある。それぞれの立体化駆動に関して、力学と形状変化の測定を 3 回対称 RES 模型で行ない、並行して有限要素法シミュレーションで実験モデルを再現して力学応答と変形を計算した。

3.3.1 物理模型の作成方法

3 回対称 RES をユポ紙 (Yupo コーポレーション) で作成した。ユポ紙はショッピングカードや診察券などに使用される丈夫な素材で、吸湿性が小さいため湿度によって材料パラメータが変化しにくく、破れにくい性質がある合成紙である。形状パラメータは図 3.1(a) のパターンに従って、 $a = 25/\sqrt{3}$ mm、 $b = 18$ mm、そして厚さを $t = 0.5$ mm とした。ユポ紙には形成時の引き伸ばしの効果から紙の流れ目が存在し、曲げ剛性に異方性がある。本実験における RES は 3 回対称で、曲げ変形が顕著に発生する Arm の曲げの向きは 120° ずつずれているため、紙の縦目と横目それぞれに沿った方向の曲げ剛性を平均して、ユポ紙の曲げ剛性として RES の力学を議論した。付録 A.2 に示す方法で、厚さ 0.5 mm のユポ紙の単位幅 w あたりの曲げ剛性は $B/w = 22 \times 10^{-3}$ Nm であった。

折り線はシート厚のおよそ半分まで切れ目を入れるハーフカットを採用した。折り線はシートの表裏で山折りと谷折りが入れ替わるが、ハーフカットは山折りに見える方の面から切れ目を入れる。このとき表裏で折り線と切り線の位置がずれると、 $\theta = 120^\circ$ で RES に歪みが残ってしまうので、可能な限り表裏で線が一致する工夫をした。ハーフカットは、厚みが局所的に小さい線状領域を形成する。曲げに必要なトルクが面の厚みの 3 乗に依存することを考えると、例えば厚みの $1/2$ の深さに切り込むと、局所的に曲げに必要なトルクが $1/8$ である非常に曲がりやすい部分、つまり折り線を作ることができる。ただし切り込みが深すぎると、それだけシートが破断しやすくなる。また、切り込みの深さを精度良く一定にしなければ、折り目の曲げ剛性に不均一が生じるため、折り目が駆動する力学測定において再現性が低くなる。

この問題を解決するために、切り込み量を機械制御できるカッティングプロッターで RES の作成を試みた。装置は Silhouette CAMEO 3 (グラフィック) を使用した。これ

によって一定の切り込み深さの RES は作成できた。ハーフカットやモデル量産、形状パラメータを少しずつ変更したモデルを作成するときには活用できる。

ただし他の問題が生じた。表裏の切り線位置を一致させることが非常に困難であった。加工するシートの表裏それぞれで位置を一致させて装置にセットしなければならない。またソフトウェアの仕様 (2019 年 10 月現在) から、コンピュータに読み込んだ切り線図の原点を現実的にセットしたシートの原点を良い精度で合わせることが困難である。これらのことから、注意深く作業を進めても表裏で最大 2mm 程度のずれが生じた。RES の力学測定模型としては問題があるため、RES 作成方法には採用しなかった。カッティングの設定値については、付録 C.1 で述べる。

後述のトルク測定 (3.3.2 章) では、折り目の駆動も測定に影響することが予想されたので、均一なハーフカットの必要があった。そこで、作成を外部業者 ((株) 藤塗装工業) に工業用のカッティングプロッターを使用した加工を依頼した。ある程度表裏でずれが生じたが、研究室のプロッターで作成した模型よりも制度が良かったので、この模型でトルク測定を実施した。

表裏の切り線のずれを最小に抑える方法としては、手で切ることが確実である。ただし、ハーフカットの難点である切り深さを一定にすることと、量産することはできない。刃出し量を調整できるカッターナイフを作成すれば、切り深さの問題は解決するかもしれないが実現していない。また、折り目のトルクを考慮しない場合や折り目で面角度が変わらない場合はハーフカットの切り深さを考慮しなくても良いので、立ち上がった状態の RES の耐荷重測定においてはこの方法で RES を作成した。

まず RES のを作成するシートに図 3.1(a) の折り切り線をトレース描画した。このとき表裏で線を一致させなければならない。両面印刷する場合でも、シートの差し込み方によってずれが生じるので手作業で描画した。定規で直線を引くとペン先分のずれが生じることと、複数の測定モデルを切り出す必要があったことから、図 3.7 のような描画用の型紙を作成した。基部の外縁の半径は 70 mm とした。ケント紙に図 3.1(a) を印刷し、印刷した線を中心軸とした幅約 1 mm のスリットをデザインカッターで開けた。この型紙には中心と外縁に見当切り込みを入れており、ここに針を刺して RES シートに貫通穴を開ける。これによって、シートの表裏で共通の位置に型紙を当てることができた (図 3.8(a))。型紙のスリットに沿って折り切り線をシートに描き (図 3.8(b))、裏面にも見当穴によって型紙の位置を一致させて (図 3.8(c))、折り切り線を描いた (図 3.8(d))。

次に山折り部分がハーフカットになることに注意して、金属製の定規を当てながら描画した線をデザインカッターで切った。ハーフカットに際しては、なるべく刃の押し当ての力が変わらないように気を付けた。この製造方法によって、裏表のカット線のずれは



図 3.7 図 3.1(a) に示す RES の折り切り線をユポ紙に描くための型紙。折り切り線の部分にスリットを切っており、これを両面で一致させてシートに転写し、表裏のずれを最小限に抑えた。

0.1 mm 以下に抑えることができた。ただし、やはりハーフカット部分が一部曲がりにくかったり、逆に曲がりすぎて破れたりしたため、何度も強い負荷のかかる実験にも適していない。

3.3.2 RES の回転変形に対するトルクの計測

図 3.1 に示した基本構造 RES を、回転によって駆動させる場合の駆動トルクを考える。RES は平坦状態 $\theta = 0^\circ$ から Base と Hub の z 軸まわりの相対角度 θ を少しだけ大きくするように外トルクを加えると、面の変形による反トルクが生じるため、外トルクを除くと自発的に RES は平坦態 $\theta = 0^\circ$ に戻ろうとする。そして角度 θ をある臨界角度 θ_c を越えるまで大きくすると、RES を自発駆動させる反トルクの向きが反転し、外トルクを除くと今度は自発的に起立態 $\theta = 120^\circ$ に移行しようとする。一般にわれわれが RES の物

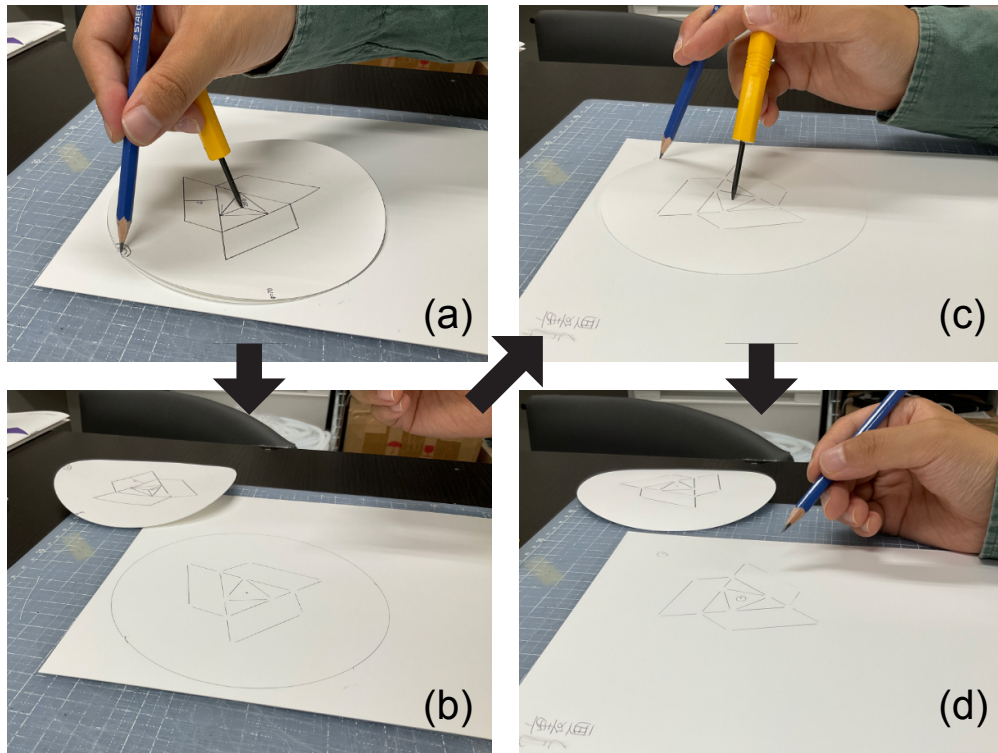


図 3.8 RES の折り切り線の描画方法。(a) 型紙の見当を使って裏まで貫通する小さな穴をシートに開ける。(b) 型紙の位置がずれないように気を付けて、型紙のスリットに沿って折り切り線をシートに描く。(c) シートと型紙を両方裏向きにして、見当穴を頼りに表との位置を一致させる。(d) 裏にも折り切り線を描く。

理模型を指などで回転駆動させる場合、相対角度 θ が正に増加する一方向の外トルクを加えることになるが、臨界角度 θ_c を越えて回転させた場合、RES の反トルクの向きが切り替わって瞬間的に起立態 $\theta = 120^\circ$ に飛び移る。この急激な変形を飛び移り変形やスナップ変形と呼ぶ。RES の回転駆動に関しては、起立態 $\theta = 120^\circ$ から平坦状態 $\theta = 0^\circ$ に動かしても同様の同様の飛び移り変形を経て運動する。

また起立状態 $\theta = 120^\circ$ では、折り目に系全体の曲げ変形を局在させることで、全ての構成面パートは平面となるため、折り目の弾性や塑性は無視できる状況では内部トルクが消失する。このことから、起立状態は $\theta = 120^\circ$ と、そもそも平面構成である平坦状態 $\theta = 0^\circ$ は、それぞれ外力がなくても形状を維持できる安定状態となる。この RES の回転駆動における、角度 θ° に対する反トルク $M(\text{Nm})$ を実験的に測定した。

トルク測定装置系全体を図 3.9(a) に示す。ユポ紙で作成した RES の模型は、Hub を回転させず自由に平行移動できるようにリニアガイドに取り付け、Base は図 3.9(b) に示すトルク測定装置の回転台に取り付けてその場で回転変位 $\theta(^{\circ})$ を与える。トルク測定

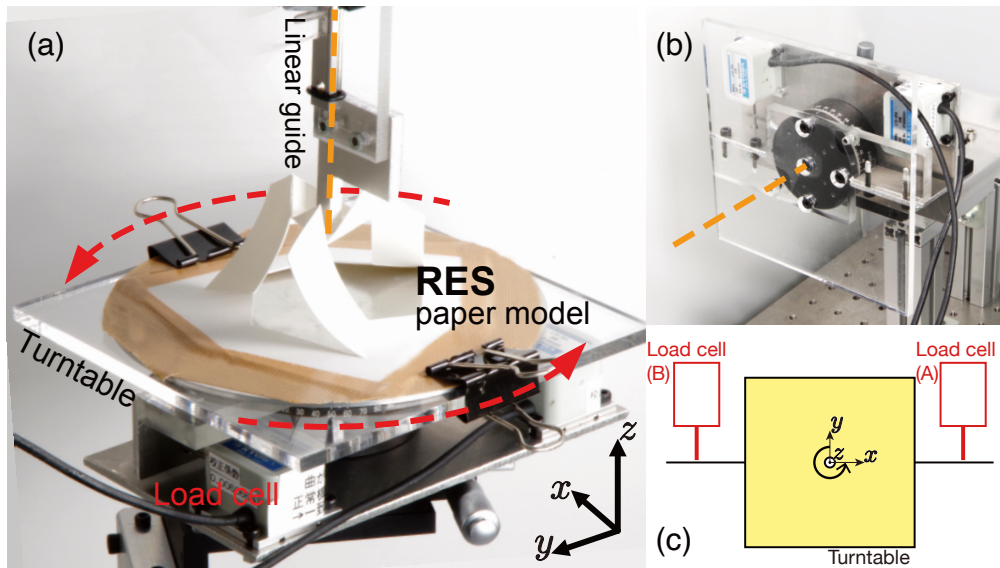


図 3.9 (a) トルク測定の様子。RES の実験模型の Hub をリニアガイドに接続し、 z 軸に沿って平行移動だけできるようにする。Base は (b) に示すトルク測定装置の回転台に固定し z 軸 (橙点線) まわりに角度 θ 回転させる。回転台には (c) のように、回転の偏角方向に荷重測定のためのロードセルが設置してあり、RES の反トルクを測定する。

装置は図 3.9(c) のように、回転台に回転軸から $r = 0.06 \text{ m}$ 離れた位置に偏角方向の力を計測するロードセル (LTS-2KA KYOWA) が設置してあり、ロードセルが計測する力 $F(\text{N})$ によって、回転台がうける反トルク $M = Fr(\text{Nm})$ を計測する。ロードセルは (A) と (B) の 2 台設置されており、右回転、左回転それぞれのトルクを測定することができる。このトルク測定システムを用いて、RES 物理模型を回転駆動させた場合の反トルクを測定した。

また同時に、RES を θ だけ回転駆動させたときの Hub の変位、つまり RES の高さをリニアガイドの z 軸方向の変位 $z(\text{mm})$ によって計測した。

3.3.3 平坦状態の RES の伸長に対する力の計測

図 3.1 に示した基本構造 RES を、平行移動によって駆動させる場合の駆動力を考える。3.3.2 章で説明した回転駆動と同様に、RES は平坦状態 $z = 0 \text{ mm}$ から Base と Hub の間の距離 z を少しだけ大きくするように外力を加えると、Base と Hub が相対的な角度 θ ねじれながら駆動して、ある臨界を越えると飛び移り変形を起して、 $z = \sqrt{3}a (\text{mm})$ の高さの立ち上がった安定状態に移行する。ただし、この z 軸方向の外力による駆動に関しては、回転駆動の場合と違い、立ち上がった状態 $z = \sqrt{3}a (\text{mm})$ から z を小さくする方向

に外力を加えても平坦状態 $z = 0 \text{ mm}$ に戻ることにはできない。そのため、平坦状態から z 正方向に外力を加えた場合と、立ち上がった状態から z 負方向に外力を加えた場合に分けて測定実験を実施した。 z 負方向に外力を加える実験は 3.3.4 章で述べる。

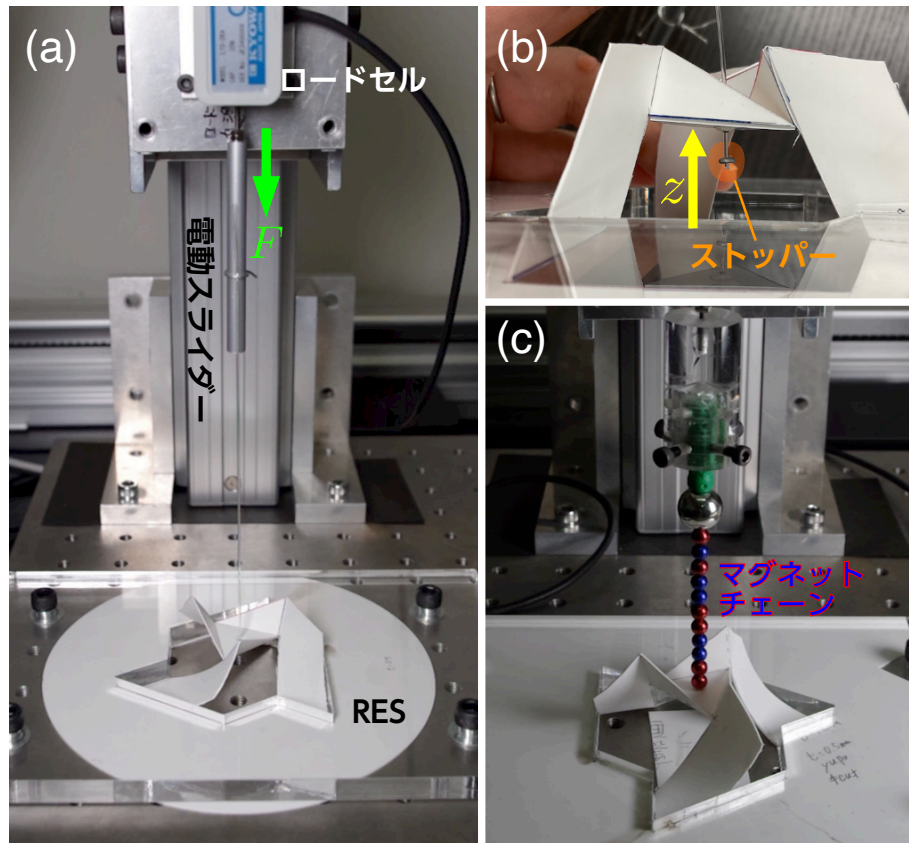


図 3.10 RES を平坦状態から Hub の引っ張りによって立体化させるときの駆動力測定系。(a)RES の Base を固定し、電動スライダーで位置制御できる荷重測定用ロードセルに取り付けたワイヤーを RES の Hub に接続して引っ張りながら反力を測定する。(b)Base と Hub 間の距離を RES の高さ z とし、対応する反力 F を測定する。ワイヤーはストッパーで Hub に接続されている。(c)Hub が自由に回転できるように、ワイヤーをねじれの摩擦が最も少ないマグネットチェーンに置き換えた測定も実施した。

図 3.10(a) のように、RES の Base をアクリル板で固定し、ステッピングモーター駆動の電動スライダー (EASM4XE040ARAC, orientalmotor) で一軸方向に位置制御できる荷重測定用ロードセル (LTS-2KA, KYOWA) に固定した伸縮しないナイロンワイヤーで Hub を引っ張った。ワイヤーは Hub に穿ったワイヤーの直径程度の穴を通し、魚肉ソーセージの止め金のように短い針金を巻いて圧着したストッパーで、ワイヤーが穴から抜けないようにして Hub に接続した (図 3.10(b))。このワイヤーと Hub の接続方法では電

動スライダーで与える RES の高さ z よりも Hub の高さが大きくなった場合、Hub はストッパーを離れた。これは後述の 3.4.1 章で説明する回転駆動に対する RES の高さの測定結果 (図 3.15) より、RES の高さは平坦から立ち上がった状態への駆動中に単調増加しないことが、予備実験からわかっていたからである。この結果から、完全な高さ制御で RES を立体化させようとする、Hub を立ち上がった安定状態の高さである $z = \sqrt{3}a$ を越えた $z = z_{\max}$ まで持ち上げた後、また $z = \sqrt{3}a$ に戻す操作が必要であることがわかるが、 z_{\max} は予測不可能なため、この操作はできなかった。そのため、 z 正方向への RES の自発駆動は阻害しない測定系を組み立てた。 $z < \sqrt{3}a$ の領域で RES の飛び移り変形が発生するならば、RES が自発駆動によって $z = z_{\max}$ を経て $z = \sqrt{3}a$ まで変形し、その間測定する反力が $F = 0\text{ N}$ になることが予想された。

また、ナイロンワイヤーのねじれ剛性によって RES の Hub が自由に回転できず、反力 F の測定に影響する可能性が考えられた。そこで図 3.10(c) に示すようにナイロンワイヤーをマグネットチェーンに置き換えて同様の実験を実施した。マグネットチェーンは球形のマグネットビーズを数珠繋ぎにくっつけたもので、それぞれのビーズは点接触しているため、回転に対する摩擦はほぼ発生しない。ちなみに RES の Base はスチールフレームの光学定盤に固定されており、磁場によりマグネットチェーンを引き付ける効果があった。そのためこの影響を除くため、RES を取り付けずマグネットチェーン単体でも z 軸方向に動かし、磁場による力を測定したデータで RES の反力 F の測定結果を補正した。このマグネットチェーンによる反力 F の測定結果とナイロンワイヤーでの結果には違いが見られなかったため、ワイヤのねじれ剛性による反力測定の影響は無視できると判断された。

3.3.4 立ち上がった状態の RES の垂直耐荷重の計測

3.3.3 章で説明したように、RES を平行移動の外力で駆動させようとした場合、立ち上がった状態 $z = \sqrt{3}a$ から RES の高さ z を減少させる方向に外力を加えても RES を平坦状態 $z = 0$ にすることは困難で、RES は大きな耐荷重性能を発揮する。この章では立ち上がった状態 $z = \sqrt{3}a$ の RES の Hub に z 負方向の外力を加えたときの、変位 $\sqrt{3}a - z$ と反力 F を測定した。

3.3.3 章の実験設定とほぼ同様である。RES の Hub に変位を与えつつ RES の反力を測定するために、図 3.11 のようにステッピングモーターで z 軸方向の一軸位置制御できる電動スライダー (EASM4XE040ARAC, orientalmotor) に荷重測定のロードセル (LTS-2KA, KYOWA) を取り付け、ロードセルの荷重測定部には RES の Hub を押し込

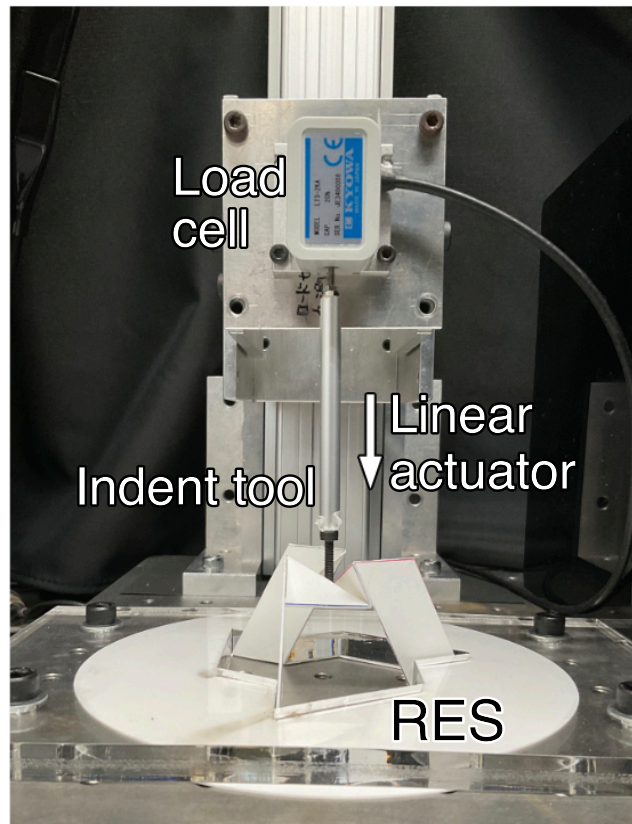


図 3.11 荷重測定装置。電動スライダーによって z 軸方向にロードセルを動かし、立ち上がった状態の RES の Hub を高さ $\sqrt{3}a - z$ (mm) に押し込んで反力 F (N) を測定する。

むための先端が直径 $\phi = 3$ mm のインデントツールを接続した。この実験においてのみ、RES の厚さは 0.4, 0.5 mm の 2 通りを用いた。

3.3.5 有限要素法シミュレーション

有限要素法解析ソフト ABAQUS(Dassault Systemès) を利用して、3 回対象 RES を再現し、実験で測定した力学応答と変形を数値解析的に計算した。Abaqus は有限要素法による構造解析ツールで、工業や企業開発で世界的に採用されているソフトウェアである。2.3.6 章でも説明する紙ばねの力学計算と同様で、ここでも構造を微小な要素に分割し、各要素周辺で力のつり合いとトルクつり合いを計算した。要素の形状は三角系要素を採用し、弾性シェルモデルを設定した。薄膜の条件では、小さな応力に対してひずみが厚み方向に小さく局在するため、構成関係式ではフックの線形法則が十分成り立つ。ただし各微

小要素のひずみは小さくても、要素の剛体回転により全体の変位は大きくなる可能性があった。そのため幾何学的な非線形性まで考慮された計算を実行した。シェルは完全な2次元平面ではなく、厚み方向にも要素を区切って変形を再現した。要素のサイズを変化させたいくつかの計算を繰り返し、結果の収束性も確認した。

完全に平坦な状態から Tab を少しだけ持ち上げた形状を初期状態として設定し、回転駆動に関しては立体化と平坦化の往復を計算した。後述の 3.5.1 章で触れるが、RES は平坦状態から駆動すると腕の座屈が伴う。そのため数値計算上の理想的な RES で、完全な平坦状態から駆動を始めると、座屈のたわむ方向が予測できない。物理的な RES 模型には、折り目の塑性変形や紙のくせがあるため、図 3.12(a) のようにすべての Arm 面が下に凸になるような変形駆動経路を辿る。シミュレーションの RES では初期条件によっては図 3.12(b) のようにすべての Arm 面、または一部の Arm 面が上に凸になるように変形が始まると、応力集中を生じさせる変形になり、シミュレーションでは計算負荷が異常に増大してしまった。物理模型で Arm 面が上に凸になる変形をさせると、折り目付近への応力集中により亀裂が発生した。RES を意図する“正しい”変形経路を辿るように、初期状態で3つある Tab の 60° 頂角を Δ だけ変位させから、回転変位を与えた。

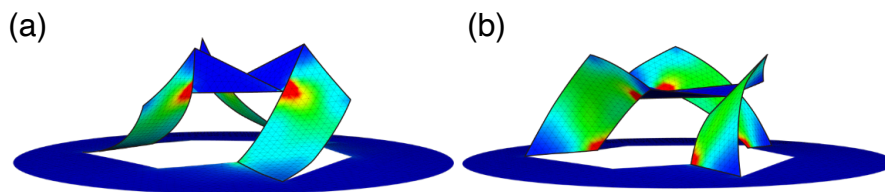


図 3.12 (a) 思わく通りの方向に Arm が座屈して変形したときの RES シミュレーション図。実験と同じ形状である。(b) 初期状態の微妙な変化によって、Arm が上に凸になるように座屈しはじめた RES 場合。初期の些細な変化は変形が進むと増大し、どこかで安定な形状に移ろうとしてより大きなエネルギーバリアを越えることになる。現実にはこれは無理矢理な変形なので、多くの場合構造の破損に繋がる。

3.4 結果

3.4.1 回転変形に対するトルク

図 3.13 は RES の回転駆動反トルク測定の結果について、数値シミュレーションの結果と、実験の結果を併せて表示したグラフである。横軸は回転角度 $\theta(^{\circ})$ 、縦軸は Arm の単位幅あたりの曲げ剛性で規格化したトルク Mb/B とし、対応する回転角度の場所に、シ

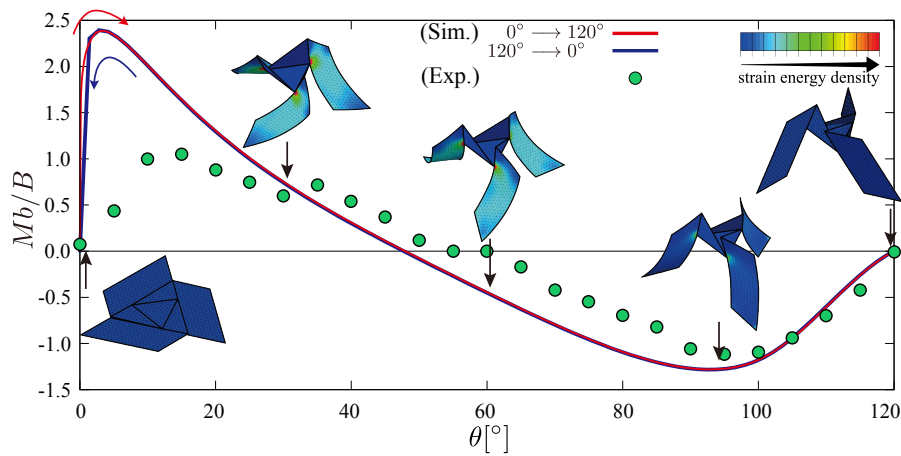


図 3.13 RES のねじれ角度とトルクの実験測定と数値解析の結果。緑丸で示した実験測定と、実線で示した有限要素法シミュレーションで得られた、規格化したトルク Mb/B を Base に対する Hub の回転角度 $\theta(^{\circ})$ の関数として表示する。数値計算は平坦から立ち上がる過程を赤線、立ち上がった状態からまた平坦に戻る過程を青線で表す。挿入図はシミュレーションした RES 変形図で、全ひずみエネルギー密度のカラーマップで着色している。 $\theta \sim 50^{\circ}$ 付近でトルクの正負が切り替わる飛び移り変形の臨界角度が現われる。

シミュレーションで計算した RES の形状を全ひずみエネルギー密度を表示したカラーマップのスナップショットを表示した。このスナップショットから、駆動中の RES の変形は主に Arm で発生していることがわかった。全体的に数値解析と実験それぞれのデータからは同じ傾向が得られたので、2つの手法はどちらも有効であることが確認できた。ただし $0^{\circ} < \theta < 20^{\circ}$ の領域では、実験とシミュレーションの結果に差がある。このことについては、3.5.2 章で詳しく議論する。

3.4.2 伸長に対する力

平坦状態から RES の高さ z を増加させるように Hub を引っ張って立体化させたときの反力 F の測定結果を図 3.14 に示す。図 3.14 のように、立ち上がった安定状態 $\theta = 120^{\circ}$ の RES の高さで規格化した引っ張り変位 $z/\sqrt{3}a$ に対する測定された反力 F (N) のデータと、有限要素シミュレーションの計算結果を比較すると、力曲線が極大値に達するまではよい一致を示した。数値シミュレーションにおいては、回転駆動トルクの結果 (図 3.13) では臨界角度 $\theta_c \sim 50^{\circ}$ で飛び移り変形が発生しているが、高さ測定の結果 (図 3.14) で対応する $z_c/\sqrt{3}a \sim 0.95$ で $F = 0$ N となった。実験の RES 模型には紙のクセや折り切り線のひずみなど、複雑な要因があることを考慮すると、トルクと力の応答に関する計算と

実験は全体的に見ても妥当であり、平坦状態からの引っ張りによる駆動でも RES は飛び移り変形を起こして、立ち上がった安定状態に移行することがわかった。

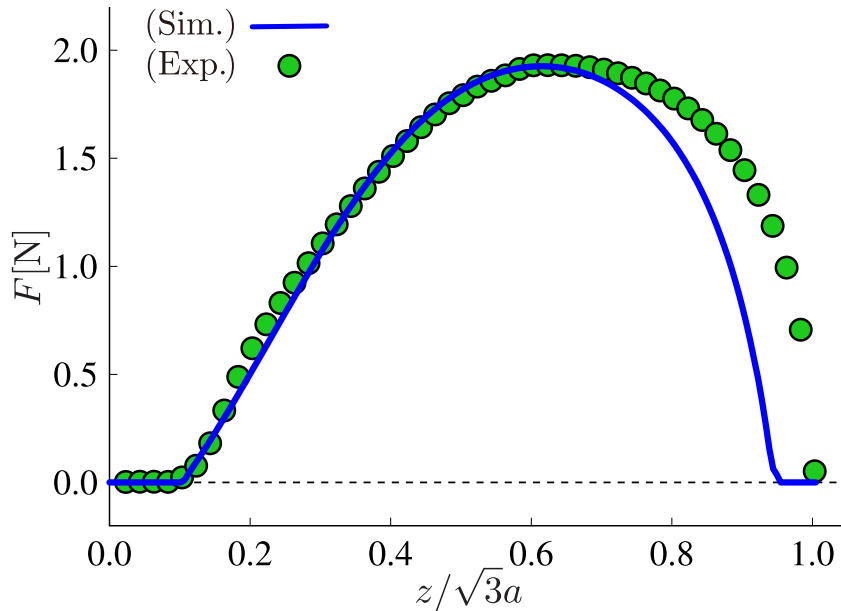


図 3.14 高さとの結果。 $z/\sqrt{3}a = 0.6$ 付近で極大値となり、それより小さい領域では実験とシミュレーションは良い一致を示す。そして $z/\sqrt{3}a = 1.0$ までで $F = 0\text{ N}$ となり、RES は飛び移り変形することがわかる。

3.4.3 回転変形に対する高さ

RES が回転変形したときの高さの測定結果を図 3.15(a) に示した。この結果は数値シミュレーションが実験と同じ変形を再現できていることを示している。また、 $50^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲で高さ $z/\sqrt{3}a$ が 1 を越えていた。最も高さが大きくなったときのシミュレーション形状のスナップショットも同時に示した。高さが最大するとき、顕著に Base と Arm の接続部分が変形し、Arm が回転軸外側に向かって張り出すように傾いていることがわかった。

3.4.4 立ち上がった状態の垂直耐荷重

RES が立ち上がった状態の安定性に注目する。この状態の RES の Hub に垂直荷重、つまり高さが減少する方向に力を加える実験をした。変位 z に対する荷重 F を測定した結果を図 3.15(b) に示す。この実験とシミュレーションの結果には良い一致が見られる。

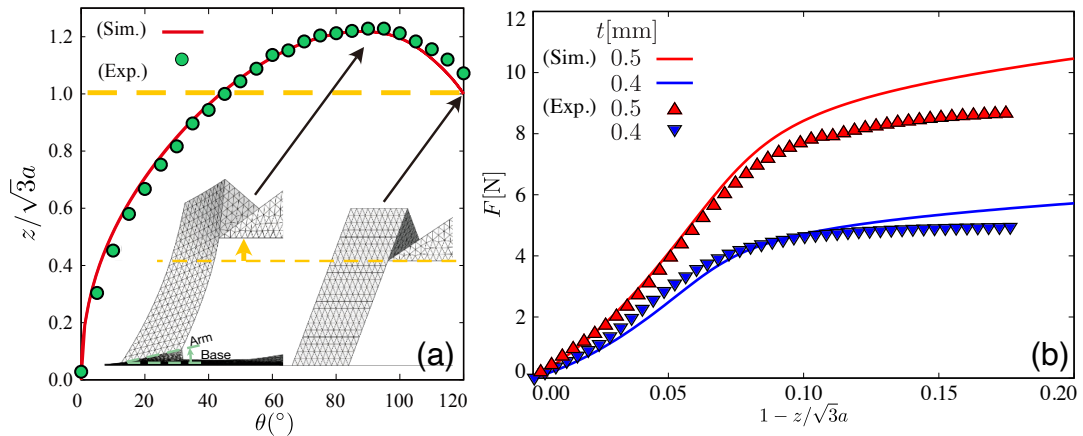


図 3.15 (a) ねじれ角度と高さの結果。50° < θ < 120° の範囲で一旦高い経路を経て、別の安定状態に移行することがわかる。スナップショットはシミュレーションで再現した形状で、それぞれ $\theta = 90^\circ$, 120° の結果である。(b) 立ち上がった状態における RES の耐荷重測定の結果。RES の厚さ $t = 0.4\text{mm}$ (青) と 0.5mm (赤) で実施した実験 (点) と数値シミュレーション (線) の荷重測定結果をグラフに示す。

RES はねじれ変位を与えた場合と違って、可逆な変形経路を辿ることはできず、荷重を除くとその瞬間、復元力によって立ち上がった安定形状に戻った。この結果については 3.5.5 章で詳しく議論する。

3.5 考察

3.5.1 トルクのピークと臨界座屈

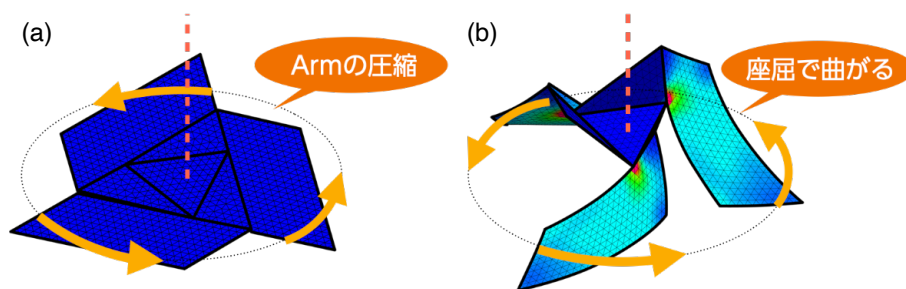


図 3.16 (a) 平坦な安定状態に z 軸 (橙点線) まわりのトルクをかけると、ごく初期には面内の圧縮が発生してほとんど形状変化しないが、(b) すぐに座屈が生じて Arm が曲げ変形を起こし系全体が立体化し始める。

トルク測定の結果 (図 3.13) において、RES が平坦な状態から変形し始める $0^\circ < \theta <$

30° の領域に注目する。数値計算で再現した理想化された RES においては、図 3.16 のように 3 本の Arm パートが座屈することで変形が進んでいる。このことによって、 $\theta = 0^\circ$ 付近でトルクは $M = 0$ から $2.5B/b$ まで急激に増加している。簡単のため、Arm を幅 b 、長さ L 、厚さ t の短冊に近似して、その端に外力 f が作用している場合を考える。このとき短冊は、式 (1.29) より臨界外力が

$$f_c \sim \alpha B/L^2 \quad (3.9)$$

のときに座屈する。ここで α は端の固定条件に依存して変化する係数で、1.4.2 章でも述べたが高々数十の大きさである [46]。3 回対称 RES で Arm は 3 本あるので、座屈トルクは

$$M_{c+} \sim 3f_c a \sim 3\alpha Ba/L^2 \quad (3.10)$$

と見積もることができる。ここで今回の RES の Arm の長辺 $L = 2a$ の条件下では、

$$M_{c+}b/B \sim (3\alpha/4)b/a \quad (3.11)$$

であると予想される。シミュレーションにおいて、 b/a を変化させて RES の駆動トルクを計算し、トルクの極値を図 3.17 に示す。また、最小二乗フィッティングした線形近似のグラフを破線で示す。ここから $M_{c+}b/B$ は、たしかに b/a に比例していることがわかる。ただし、ここで $b/a > 1.5$ のデータは短冊形の仮定から離れるので、フィッティングの計算から除外している。直線近似の傾きから $\alpha = 2.7$ であり、座屈の臨界荷重の理論において妥当な結果だといえる。

3.5.2 初期状態 ($\theta = 0^\circ$) の微小ひずみを与える影響

$0^\circ < \theta < 30^\circ$ でシミュレーションの結果と比較して、実験の測定結果はなだらかなトルク曲線となった。これは実験模型の紙で作成している RES の Arm は、 $\theta = 0^\circ$ で完全に平面ではなく若干の曲率が生じているためである。ハーフカットの折り目の駆動を円滑にするため、作成時に少なくとも一度は RES を立体化させているが、このときの変形で Arm に曲げの“クセ”が付く。ハーフカットの性質上、RES は 1 方向にしか立体化できないため、一度付いたクセを解消することはできない。このことを検証するために、数値シミュレーションにおいても初期状態として実験模型と同程度に Hub を垂直に持ち上げた計算を実施し、最初のひずみが RES の初期トルク応答にどう影響するが調べた。平坦な RES の 3 つの Tab パート 60° 頂角に、仮想的な外力を加えて Δ の垂直変位を与えて (図 3.18) 初期状態とし、トルクの計算をした。その結果図 3.19 が得られた。 Δ が大きく

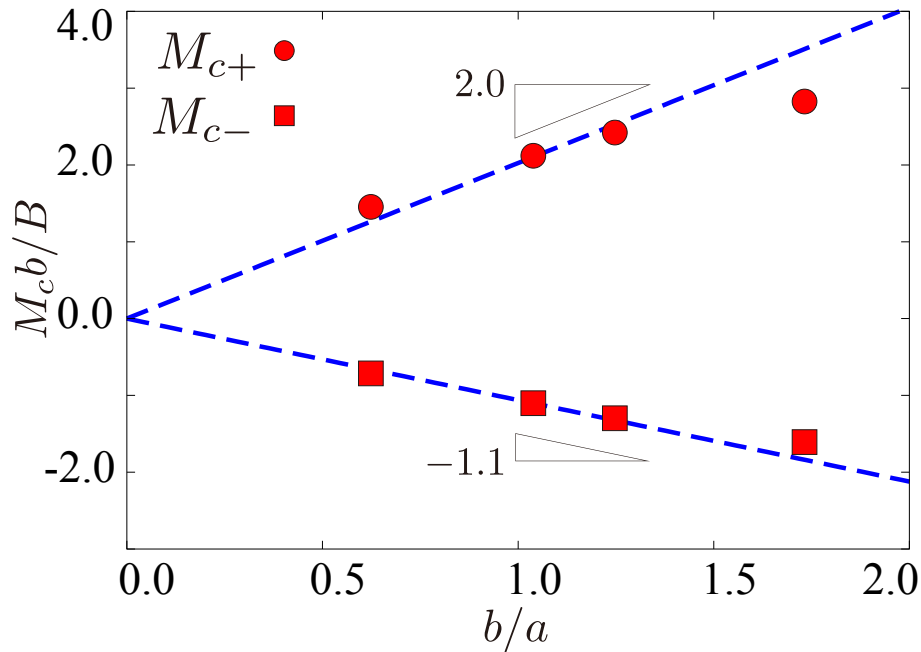


図 3.17 図 3.13 に示したトルクの極値 M_{c+} と M_{c-} について、シミュレーションで b/a を変化させて計算したグラフ。破線はスケーリング理論の予想に基づいたシミュレーションの結果の近似直線である。

なるにつれて、初期の傾きが小さくなり、ピークの大きさも小さくなって、実験のデータに近づいていることがわかる。他にも、紙の手作りの模型の精度に限界があるなど、実験的な傾向を示す複数の要因がある可能性はある。今回の数値解析は、Arm の初期ひずみが RES の駆動トルクに大きな影響を与えていることを裏付ける結果となった。

図 3.13 より、RES 駆動トルクの数値計算では、平坦状態から立体化するときも、立ち上がった状態から平坦化するときも同じトルク曲線を辿り、可逆な変形であることが確認できる。ただし、完全に平坦の状態 ($\theta = 0^\circ$) からの変形経路はいくつか存在する。立ち上がった状態まで変形をするためには、 θ が十分小さい領域で Arm が座屈する方向が重要になる。より小さいエネルギーコストで RES が駆動するためには、すべての Arm が下向きに凸になるように同期して座屈し、Hub は水平かつ中心の軸を中心として回転を始めなければならない。人間が紙の RES を動かすときは、無意識のうちにこの変形操作をしているので、RES は無理なく展開できる。しかし、機械的な Hub の引っ張りで RES の物理モデルを駆動させる場合、または数値シミュレーションでこの駆動を再現する場合は、初期の座屈方向を制御しなければ、図 3.13 に示したような連続的な変形は実現しない。このことは実際の物理システムで、初期に微小なひずみを付加することで、駆動に必

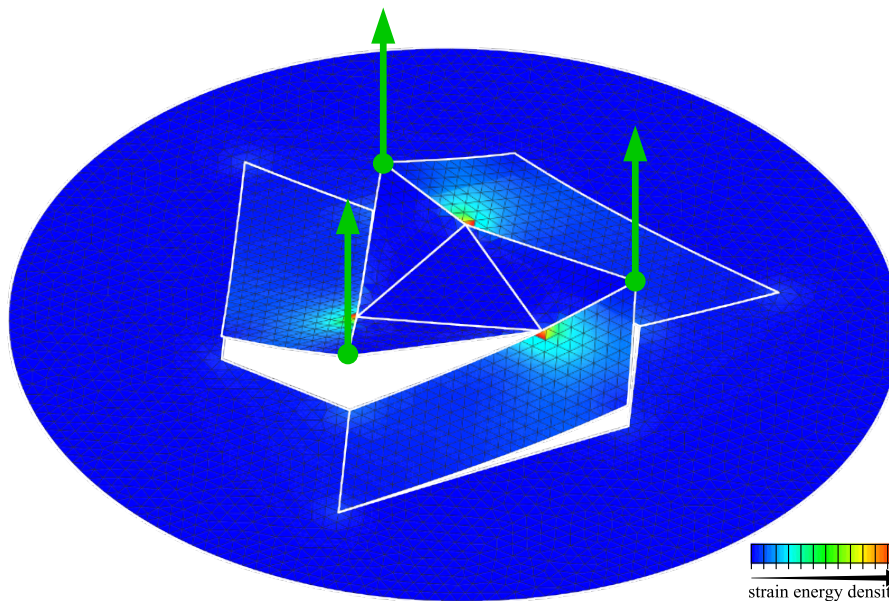


図 3.18 数値シミュレーションで初期状態を変化させる。このとき、Tab パートの 60° 頂角 3 つを垂直に Δ だけ変位させる (緑矢印)。実験測定模型と同等の初期ひずみになるように Δ は 5 – 10 mm で設定する。

要なエネルギーを劇的に単純化することができる例のひとつであり、幅広く一般的に折りたためる様々な機構の、折り目角度の平坦状態からの駆動の議論に重要な現象であると考えられる。

3.5.3 高さは中間状態で最大になる

図 3.13 で θ_c を越えた $60^\circ < \theta < 120^\circ$ の領域について言及する。このとき図 3.15 を見ると、RES の高さは $\theta = 120^\circ$ の立ち上がった形状よりも大きくなっている。このときどのような変形が生じているのか図 3.20 で詳しく考える。 $\theta = 120^\circ$ の状態から中央の Hub パートを z 軸まわりに回転させようとするとき、Hub の頂点に接続している Arm は半径外側方向に押し出されるように動かなければならない。これによって Arm は水平面に対して傾くため、Hub は $\theta = 120^\circ$ のときよりも持ち上がった経路を動く必要があることがわかる。このシンプルなパート同士の相互作用が、後述の 3.5.5 章で説明するセルフロック機能を生み出す RES の力学の基礎となっている。また Base がわずかに変形し、初期水平面から少し浮いていることも重要な要素である。Arm との接続部分における Base の、剛体折紙では積極的に排除されていたわずかな変形は、過度な応力集中による RES の破壊を抑制していると考えられる。

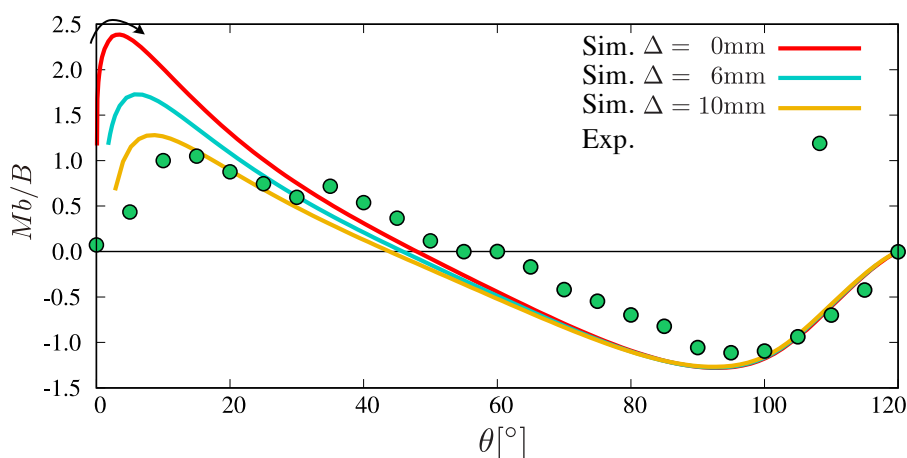


図 3.19 数値シミュレーションで初期変位 Δ を変化させたとき、 $0^\circ < \theta < 30^\circ$ での数値計算したトルクのピークは Δ の増加に伴って単調に減少する。

高さの非単調増加が Hub パートの回転に起因していると考えると、Arm の数がより多い RES をデザインすると、立ち上がった状態の高さと途中の状態の高さとのギャップは小さくなり、セルフロックは顕著でなくなることが予想できる。これは 3.5.5 章で説明する耐荷重機能の大きさにも関係する。

3.5.4 トルクのする仕事と駆動エネルギー障壁

RES が平坦状態から、他の安定して形状を維持できる状態、つまり立ち上がった状態にスナップする性質には、Arm の弾性曲げが大きく寄与している。この曲げは、正方形ねじり折りの「仮想的な折り目」[41] と同じように機能する。この弾性曲げによって、2つの安定状態間に力学的に変形することがける経路が作られる。図 3.13 の結果から RES 駆動のための仕事を $W = M(\theta)d\theta$ で計算して図 3.21 に表示する。理論計算により、変形に要するエネルギー障壁の大きさ U は次の式で表わされる。

$$U \sim \frac{Et^3b}{a} \quad (3.12)$$

ここでも RES の力学応答は b/a に依存していることがわかり、RES が全体の大きさスケールに依存しないことが改めて確認できた。つまり相似形状で RES を作成すれば、全体の大きさが宇宙構造の大きさでも、細胞の大きさでも同じ力学理論で説明することが可能である。

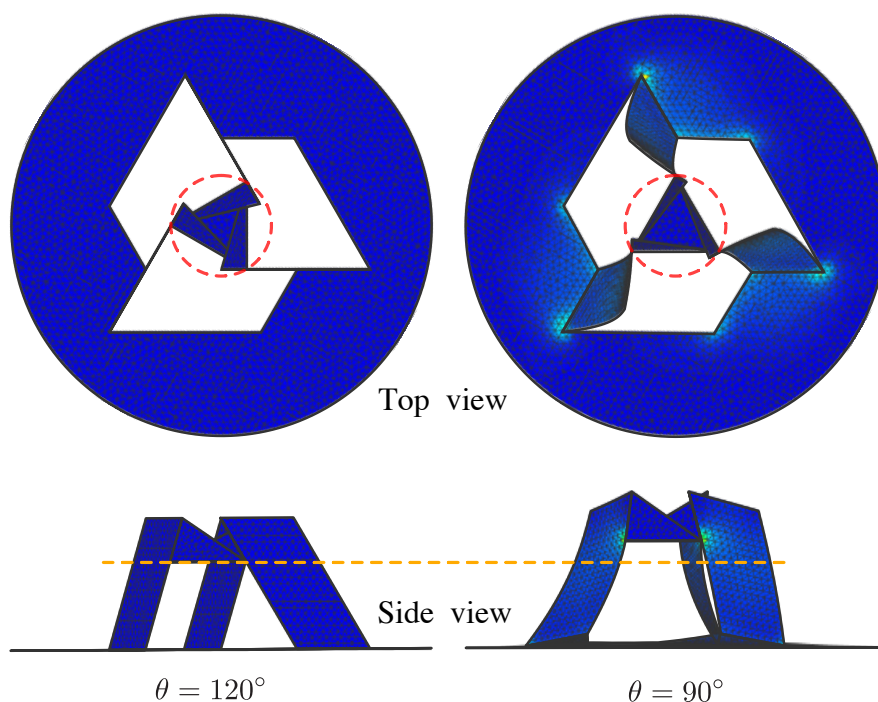


図 3.20 有限要素法シミュレーションにおける、立ち上がった安定状態 ($\theta = 120^\circ$) と高さが最大付近 ($\theta = 90^\circ$) のそれぞれの形状を上からと横から見たときのスナップショット。上視点からは、Hub がほとんど変形せず、三角形の頂点が赤点線に沿って回転していることがわかる。Arm は Base との接続軸まわりに回転しようとしても、Hub の頂角に接続されているため、赤点線に沿って外側へ押し出されてしまい、横視点から見ると Arm が傾いて Hub が高い位置に持ち上げられていることがわかる。

3.5.5 立ち上がった状態での耐荷重性とセルフロック機能

RES はねじれ変位を与えた場合と違って、可逆な変形経路を辿ることはできない。元の平坦な状態に RES が変形するためには、3.21 より角度 θ が減少する方向に回転して、エネルギーバリアを越えることで $\theta = 0^\circ$ に到達できる。しかし、高さとなじれ角度の測定結果 (図 3.15) からわかるように、 $\theta = 120^\circ$ で高さが減少する方向は角度 θ が増加する方向であり、 $\theta = 0^\circ$ に戻ることはできない。 $\theta = 0^\circ$ に戻るには高さを一度増加させなければならないため、一方向の垂直荷重のみの場合では不可能な変形である。これは門の施錠に使用される「かんぬき」(図 3.22) をかける動作に似ており、RES がセルフロックする機構を持っていることを示している。また 3.5.3 章で考察したように、Arm の数が多く Hub が頂点の多い多角形、または円形に近づくと、このセルフロックの機能を小さく

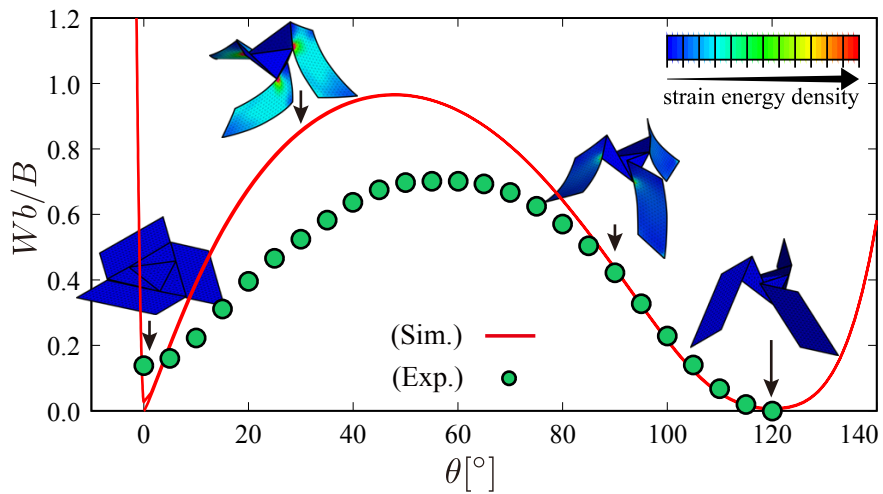


図 3.21 実験測定と数値計算によるトルクと駆動角度から、RES の駆動に必要な仕事を計算して示す。シミュレーションのデータは、 $\theta < 0^\circ$ と $120^\circ < \theta$ の範囲まで計算したものである。

した RES もデザイン可能だと予想されている。



図 3.22 一般的なかんぬき。門扉を固定する機構として広く用いられる。かんぬきを外すためには、一旦重力に逆らって鉛直上にかんぬきを持ち上げてから、かんぬきを下に下さなければならない。

3.6 まとめ

RES は二次元のシートに折り目と切り目のパターンを適切に配置することで、駆動の双安定性と横のサイズを維持したまま縦に立体化できる性質をプログラムできる回転ポップアップ構造である。一般の RES は精巧なレリーフやドーム建築、多段に重ねたタワーなど、いくつもの立体構造として開発されている。その中でも最も基本となる 3 回対称の RES について、いくつかの駆動特性の仕組みを明らかにした。平面状態から立ち上がり駆動を開始するときには、面の座屈が発生するため、臨界座屈の理論から RES の駆動に必要なエネルギーが Arm と呼ばれる部分のアスペクト比に依存していることを定量的に示した。また RES の 2 安定状態の駆動途中で、RES の高さが最大になることを実験的に示し、立ち上がった安定状態ではセルフロック機構によって、垂直方向の荷重に対しては大きな耐荷重性能が得られることを明らかにした。RES が Arm のアスペクト比で双安定のエネルギーバリアを調整できる特性から、スイッチデバイスやワンステップで構築可能な建設システムなど、幅広いアプリケーションの活用可能性がある。

第4章

まとめ

うすい構造は2つの方向の大きさに対して、特定の1方向には顕著に小さいという形状的な異方性から、展開しまた収納できる幾何学的な特徴がある。またその駆動を力学も含めて考えると、伸縮と曲げの性質が異なる2種の変形を可能にしている。このことから、伸縮変形と曲げ変形の発現をうまく制御できれば、材料が同一であるにも関わらずデザイン次第で、大きな剛性を付与したりスナップ駆動や多安定性などうすい構造にユニークな特性を生み出したりすることができる。本論文では、面の曲げ弾性が駆動に主要な要素となり、展開収納を実現するうすい構造の基本的なワーキングモデルを2つ取り上げ、作成、物理実験、数値シミュレーション、そして理論分析を組み合わせることで、その幾何学と力学の特性を明らかにした。

2章では、面の曲げ変形によって大きな復元力を生み、伸展させて離すと元の状態に自発的に戻る紙ばねに注目した。正方形紙ばねはじゃばらの帯を2本組み合わせただけの非常にシンプルな構造であるが、回転と並進の運動を幾何的に強く結合し、非線形な弾性力を持つ。本研究では、伸縮とねじれの強いカップリング作用が紙ばねを構成するじゃばら帯どうしのインターロッキング構造にあることに言及し、1枚の構成面の変形が曲げだけでなく幾何的な拘束による局所的な面内圧縮を生じて、系全体の弾性に影響していることを明らかにした。

3章では、面の曲げ変形による弾性影響の方向が駆動経路の途中で反転し、臨界角度を越えてねじると飛び移り変形によって別の安定状態に移行する RES に注目した。カイラリティを持つ折り切り紙 RES の中でも、最も顕著に飛び移り変形と双安定性を示す構造のひとつである Arm90° 立ち上がりの3回対称 RES は、平面シートへの折り目と切り目のパターンニングによって立体構造を構築することができる。また、ねじれ回転制御による駆動と高さ制御による駆動、それぞれで立体化できるが、高さ制御に関しては単調な変

位で駆動することができない性質があり、これによって立ち上がった状態で強い耐荷重性能を持つ。この非対称な駆動をセルフロック機構によって説明した。そして回転駆動の双安定性のエネルギーバリアは特定の構成面の縦横比に依存することも明らかにした。

以上のように、折り紙および切り紙をベースにしたうすい構造の具体モデルについて、物理的特性が創発するしくみを定量的に明らかにした。これらの結果は、材料の特性ではなく形状のデザインによって、展開と収納の新しい概念を生み出す基盤となり、人工物のシステムに二次元のパターンから三次元の駆動機能をプログラムするような手法を提供することが期待される。また、生物に見られるような、面の曲げ弾性を蓄積して自発駆動する機能を持つうすい構造の展開収納を説明するためにも、本研究の結果はその基礎概念を応用できるポテンシャルがあり、さらにバイオメカニクスの観点から生物のうすい構造のしくみを最適化してデザインに取り込むためにも有用である。

付録 A

弾性力学の理論

A.1 三次元弾性固体

ここでは理解を深めるため、体積を持つ一般的な弾性固体の変形と力学応答に関する基礎的な理論を紹介する。これらの理論は [46, 70, 71] に基く。

弾性体

そもそも弾性体とは何なのかについて触れておく。まず弾性体とは三次元空間内に連続して存在しているとみなせる「連続体」の一種である。例えば、何となく弾性体の典型だと思っているゴム材料も、分子スケールの視点では分子が存在するところとその隙間あり、連続体とはみなせなくなる。連続体という概念は議論するスケールにも依存することになる。そのため、ここでは原子分子のサイズよりも十分大きい材料のことを議論すると注意書きしておく。原子や素粒子などを認識してしまってから、厳密には現実には連続体は存在しないことになったが、あくまでも現象を理解するために理想化されたモデルとしては連続体として対象を捉えることには十分意味がある。

「覆水盆に返らず」ということわざがあるように、形状を自由に変えられる流体とは違って、自然状態にある弾性固体に外力を与えると反発力を伴って変形し、外力がなくなるとまた自発的に自然状態に戻る。変形したときに、個体を構成する原子や分子の相対位置をその引力相互作用に抗って移動させなければならず、この結合を戻そうとする作用が弾性応答の起源と考えられる。手近な例では、輪ゴムを引っ張ると伸びるが、離すと元のかたち（つまり自然状態）に戻ることに相当する。つまり、弾性体は変形とそれに伴って復元力が生じる連続固体と定義できる。

ひずみ

弾性体が変形するとき、基準となる元のかたちから、変形後のかたちでどれだけ変形したのかを、ひずみという幾何的な量で表わすことができる。端的に説明すると、ひずみとはもとの大きさと変形後の距離の比であり、三次元の弾性固体ではひずみをテンソルの表記で、

$$\epsilon_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(\vec{r})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\vec{r})}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k(\vec{r})}{\partial x_i} \frac{\partial u_k(\vec{r})}{\partial x_j} \quad (\text{A.1})$$

と表わすことができる。ここから式 (A.1) の導出を示す。

位置：ラグランジュ的記述

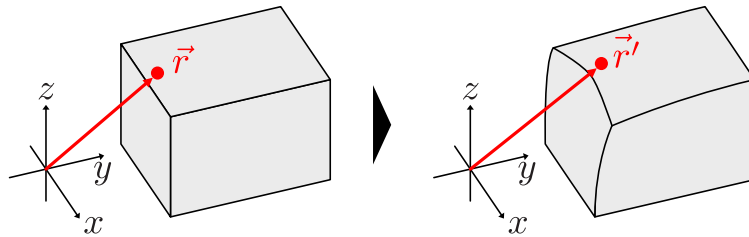


図 A.1 弾性体の変形するときのひずみ

ここで三次元の変形を記述するときに用いるラグランジュ的記述について説明する。図 A.1 のように弾性体内の位置：

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

に仮想的なマーカーを設置したとする。外力を与えて系が変形してマーカーは、

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} x'(x, y, z) \\ y'(x, y, z) \\ z'(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

に移動する。ここでは変形後をプライムを付けた記号で表わす。このようにラグランジュ的記述では、マーカーがどう動くかに注目する。

変位

位置 \vec{r} が定義できたので、次にどれだけ、どの方向にマーカーが動いたのか、変位場 \vec{u} を考える。元の位置 (x, y, z) にあったマーカーは、次のように変位する。

$$\vec{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(x, y, z) - x \\ y'(x, y, z) - y \\ z'(x, y, z) - z \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

アインシュタインの縮約記法

ここまでの数式で、既にベクトル成分や変数が大量に登場しているが、ここから更に演算するとき記述が煩雑になる。ただ、式 (A.4) を見ると x, y, z の配置には周期性がある。この周期性に注目してアインシュタインの縮約記法という、書き手にはテンソルなどの記述量が減ってご利益のある書き方を導入する。まず、デカルト座標での x, y, z の表記を x_1, x_2, x_3 と数字の添字で表わすことにする。これはコンピュータプログラムで繰り返し処理をする場合にも有用な再定義である。アインシュタインの縮約記法では便宜上の添字を使う。記法の第一のルールは、ひとつの項の中に同じアルファベット添字がある場合は添字が 1 から 3 までの和をとることである。つまり、

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (\text{A.5})$$

のように計算する。第二のルールは、ひとつの項の中に異なるアルファベット添字がある場合は、1 個しかない添字はフリーの添字としてそのまま残し、2 個以上ある添字をダミーの添字として 1 から 3 までの和をとるとする。つまり、 $a_i = b_{ij} c_j$ と書いた場合は、

$$a_1 = \sum_{j=1}^3 b_{1j} c_j, \quad a_2 = \sum_{j=1}^3 b_{2j} c_j, \quad a_3 = \sum_{j=1}^3 b_{3j} c_j \quad (\text{A.6})$$

となる。アインシュタインの縮約記法の添字はその式の中で便宜上書く実体のない記号なので、他の式に代入する場合などは添字を別の文字に変更することには注意しなければならない。このアインシュタインの縮約記法を使えば、変形後の位置は、

$$\vec{r}'(x_j) = [x_i + u_i(x_j)] \hat{e}_i \quad (\text{A.7})$$

と表わすことができる。ただし、 \hat{e}_i は x_i 方向の単位ベクトルである。

ひずみの話に戻る。ひずみは、変形前の状態から変形後はどれだけ弾性体内の位置関係が変化したかを表わすので、ここからは弾性固体内に 2 つの仮想マーカーを設置し、その

2点間の距離の変化に注目する。基準のマーカ位置を \vec{r} 、もうひとつのマーカの位置を基準マーカから微小な相対距離 $d\vec{r}$ にある位置 $\vec{r} + d\vec{r}$ とする。変形後は、2点間のベクトルは $d\vec{r}'$ となる。2点間の距離がどう変化するか、相対距離の二乗の差で表わすと、

$$\begin{aligned} (d\vec{r}')^2 - (d\vec{r})^2 &= (d[x_i + u_i(x_j)] \hat{e}_i)^2 - (dx_i \hat{e}_i)^2 \\ &= \left(\left[dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \right] \hat{e}_i \right)^2 - (dx_i \hat{e}_i)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

と書ける。アインシュタインの縮約記法では、このように2乗した場合に注意が必要で、添字を変えなければならない。まず式 (A.8) の第一項を注意深く展開してみる。

$$(d\vec{r}')^2 = \left[\left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \right) \hat{e}_i \right]^2 = \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \right) \hat{e}_i \cdot \left(dx_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_l \right) \hat{e}_k \quad (\text{A.9})$$

ここで、デカルト直交座標系 \hat{e}_i を使っていることから、クロネッカーデルタ記号で、

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik} \quad (\text{A.10})$$

と表わすことができることから、 $i \neq k$ のときに $\delta_{ik} = 0$ であることに注意して式 (A.9) の式変形を進めると

$$\begin{aligned} & \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \right) \hat{e}_i \cdot \left(dx_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_l \right) \hat{e}_k \\ &= \left(dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j dx_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_l dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} dx_j dx_l \right) \delta_{ik} \\ &= \left(dx_i dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_l dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_j dx_l \right) \\ &= \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

となる。最後の式変形は、添字の種類が少なくなり、かつアインシュタインの縮約記法と矛盾しないようにまとめた。最終行の第二項と第三項は、まとめて $2\partial u_i / \partial x_j$ とも書けるが、今後の数式表現のためにあえて分けて書いておく。これによって、ひずみテンソルを対称テンソルとして表現できる。式 (A.8) の第二項も計算しておく、

$$(d\vec{r})^2 = (dx_i \hat{e}_i)^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j \quad (\text{A.12})$$

となり、式 (A.8) に戻って、今の計算を代入すると、

$$\begin{aligned} (d\vec{r}')^2 - (d\vec{r})^2 &= \left(\left[\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] - \delta_{ij} \right) dx_i dx_j \\ &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

となる。最終行で $dx_i dx_j$ の係数は、相対距離の二乗の変化量と、変形前の相対距離の二乗を対応づけるものであり、この部分をひずみテンソルで次のように定義する。

$$(\mathbf{dr}')^2 - \mathbf{dr}^2 = 2\epsilon_{ij}(\mathbf{r})dx_i dx_j \quad (\text{A.14})$$

ここでひずみテンソルには係数 2 が現われるが、これはひずみテンソルが変形テンソル $\partial u_{ij}/\partial x_{ij}$ を対称テンソルと反対称テンソルの和で記述したときの、対称テンソルに相当することに由来する。結果として式 (A.1) が得られる。

幾何学のみ理論から得られる式 (A.1) では、最後の項が非線形項であることがわかる。弾性理論では必ずひずみを考えるので、この非線形性は避けて通れない。ただし、弾性体内部で変位ベクトル場の変化 $\partial u_i/\partial x_j$ が十分小さい、つまり任意の i, j で微小ひずみ

$$|\epsilon_{ij}| \ll 1 \quad (\text{A.15})$$

を仮定すれば、非線形項は 2 次の微量として無視して考えることができる。つまり、

$$\epsilon_{ij} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.16})$$

となる。このことから、変形が十分小さければ、弾性応答も線形となることが A.1 章で議論できるようになる。

応力

応力は、弾性体内部にある力の大きさと方向を表現する物理量である。弾性体を何でも切れる剣でまっすぐに切断したと頭の中で想定してみる。そしてこのときに、もしも弾性体の形状がまったく変わらないように切断面に不思議な圧力を加えるとすると、その圧力が応力に一致する。質点や剛体を議論するときとは違って、弾性体は外から見えない物体の内部にはたらく力についても考えなければならないので、このような思考実験が有用になる。また流体とは異なり、弾性固体ではせん断力とよばれる、仮想切断面に水平な方向にも力が生じるので、応力テンソルという概念が必要になる。この章では三次元弾性体の微小変形、つまり付録の式 (A.2), 式 (A.3) を使って $\vec{r}' \approx \vec{r}$ となる場合から、力がつり合って静止した状態にある物体の応力を議論する。三次元弾性体では式 (A.17) の成分の応力テンソルで記述される。

$$\sigma_{ij}(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r}, \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_i \quad (\text{A.17})$$

式 (A.17) について考える。

体積力と表面力

応力の説明の前に、力の作用する範囲に基いた分類を紹介する。弾性固体の内部において体積のある任意の領域 V に注目する。 V が受ける外力には 2 種類ある。まず重力や電磁力のような、領域に隣接しない離れた位置から作用する力である。このような遠隔力は領域全体に作用し体積に比例するので、体積力とよばれる。物体の典型的な長さを ℓ とすると、体積力 \vec{G} は

$$\vec{G} \sim \ell^3 \quad (\text{A.18})$$

と書ける。単位質量 (密度) ρ あたりの外力を \vec{g} とすると、体積力は

$$\vec{G} = \iiint_V \rho \vec{g} dV \quad (\text{A.19})$$

と書ける。

これに対して、静水圧のように、ごく近傍の隣接する構成要素から領域 V の境界面 S を越えて伝達される力は表面力とよばれる。領域 V の内部間にも力が生じるかもしれないが、つりあい状態においては V 内部でそれらの力は打ち消し合うので、このような力は表面にのみ顕在化し境界の表面積に比例する。表面力 \vec{F} は

$$\vec{F} \sim \ell^2 \quad (\text{A.20})$$

と書ける。表面 S のうち法線方向を \hat{n} とする表面に応力 σ があるとすると、

$$\vec{F} = \iint_S \sigma \hat{n} dS \quad (\text{A.21})$$

となり、ガウスの発散定理

$$\int_S \vec{A} \cdot \hat{n} dS = \int_V \text{div } \vec{A} dV \quad (\text{A.22})$$

を持ち出すと、

$$F_i = \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (\text{A.23})$$

と書ける。また、領域 V に表われる表面力の和をとると必ず 0 になる。応力は内部の構成要素間に作用する力なので、表面力に分類される。後に $\ell \rightarrow 0$ となるような微小体積要素を考えるが、このとき体積力 \vec{G} は表面力 \vec{F} と比較してより高次の微量となるため、十分無視できるようになる。

力のつり合いを考えると、任意の体積要素 V が受ける体積力と面積力の和はゼロになる。式 (A.18),(A.23) より、

$$F_i + G_i = \iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \right) dV = 0 \quad (\text{A.24})$$

となるが、この式を満たすには被積分関数がゼロにならなければならないので、

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\rho g_i \quad (\text{A.25})$$

となり、 $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j$ は体積力に一致する。これは連続媒質の平衡に関するコーシー・ポアソンの条件とよばれる。

領域の境界と単位法線ベクトル

物体内部の領域を考えると、その境界面の向きは面の単位法線ベクトルで表現する。このとき慣例で、法線ベクトルの向きは注目する領域内側から外側へ向くことをルールとする。また表面力を議論する際も、法線ベクトルの向きを正と考える。表面力を考えるときに陥りがちだが、力の正負を間違えて計算してしまうことがよくあるため注意したい。

四面体にはたらく応力

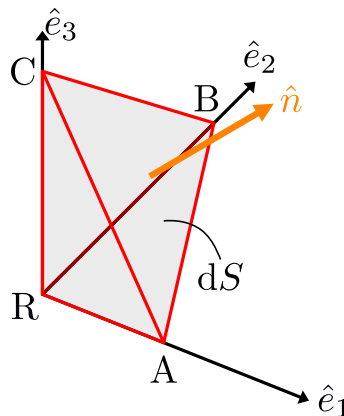


図 A.2 四面体 (仮)

応力テンソルを導出するには、図 A.2 のような微小体積の四面体を設定するとわかりやすい。任意の境界曲面は微小な三角形平面の接合で近似することができるので、四面体を基本要素として設定することは妥当である。またこの考えは、有限要素法解析でモデルを要素分割するときの、要素基本形状の指定にも利用する。この四面体のひとつの面は単位

法線ベクトル \hat{n} の方向であり、他の 3 つの面は法線ベクトルが、それぞれデカルト直交座標系の軸 ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$) の方向に向いているとする。四面体は無限に小さいため、各面に作用する力は面内で一定とみなす。また、四面体の重心位置を \vec{r} とするが、各面の位置もすべて \vec{r} で指定できるものとする。

ここで、位置 \vec{r} で法線が \hat{n} 方向を向いた面の単位面積あたりに作用する表面力を $\vec{f}(\vec{r}, \hat{n})[\text{N/m}^2]$ と表わす。 \hat{n} を向いた面の面積を dS とすると、四面体に作用する表面力の和 $d\vec{F}_{tot}$ は次のように表わせる。

$$d\vec{F}_{tot} = \left[\vec{f}(\vec{r}, \hat{n}) + (\hat{n} \cdot \hat{e}_1)\vec{f}(\vec{r}, -\hat{e}_1) + (\hat{n} \cdot \hat{e}_2)\vec{f}(\vec{r}, -\hat{e}_2) + (\hat{n} \cdot \hat{e}_3)\vec{f}(\vec{r}, -\hat{e}_3) \right] dS \quad (\text{A.26})$$

ここで、表面力の和は $d\vec{F}_{tot} = 0$ であり、 $dS \neq 0$ なので、

$$\vec{f}(\vec{r}, \hat{n}) = \sum_j \vec{f}(\vec{r}, \hat{e}_j)(\hat{n} \cdot \hat{e}_j) \quad (\text{A.27})$$

と書ける。弾性体内の仮想面に作用する力の成分は、面に水平な方向にもせん断力として発生するので、 $\vec{f}(\vec{r}, \hat{e}_j)$ を \hat{e}_i で分解して表記すると、

$$\vec{f}(\vec{r}, \hat{e}_j) = \sum_i \left[\vec{f}(\vec{r}, \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_i \right] \hat{e}_i \quad (\text{A.28})$$

なので、式 A.27 を書き換えると、

$$\vec{f}(\vec{r}, \hat{n}) = \sum_i \sum_j \left[\vec{f}(\vec{r}, \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_i \right] \hat{e}_i (\hat{n} \cdot \hat{e}_j) \quad (\text{A.29})$$

となる。この式の大括弧が式 A.17 で定義した応力テンソルに該当する。この式によって、例えば、 \hat{e}_1 方向を向いた仮想面に \hat{e}_1 軸正方向から負方向へ作用する単位面積あたりの力を考えると、

$$\vec{f}(\vec{r}, \hat{e}_1) = \sum_i \sigma_{i1} \hat{e}_i \quad (\text{A.30})$$

と書くことができ、応力テンソルの成分 σ_{i1} がわかれば対応する応力がわかる。

応力テンソルの対称性

応力テンソルは対象テンソルで、

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{A.31})$$

と書ける。このことは物体中の任意の微小体積要素に作用する応力によるモーメントを考えることで示すことができる。図 A.3 に示すように、体積が $dV = dx dy dz$ となるよう

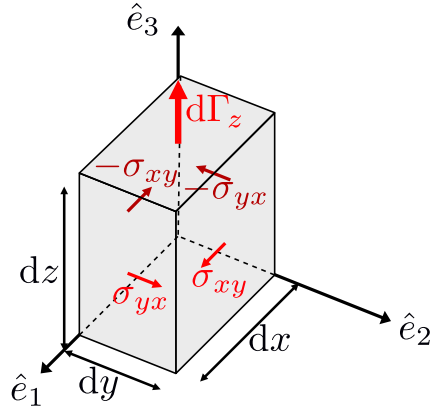


図 A.3 (仮図) 物体中の微小体積要素。

な、重心が位置 \vec{r} にあるような微小体積要素を考える。典型的なサイズ d が十分小さいので、要素内で応力は一定と近似し、要素内の任意の位置で、

$$\sigma_{ij} \approx \sigma_{ij}(\vec{r}) \quad (\text{A.32})$$

であるとする。この微小体積要素に作用する重心まわりの力のモーメントの z 成分 Γ_z だけに注目する。 x 方向と y 方向に法線ベクトルが向く面に作用する応力成分だけが Γ_z に作用するので、

$$\begin{aligned} d\Gamma_z &\approx \frac{dx}{2} \sigma_{yx} dy dz + \frac{dy}{2} (-\sigma_{xy}) dx dz - \frac{dx}{2} (-\sigma_{yx}) dy dz - \frac{dy}{2} \sigma_{xy} dx dz \\ &= (\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

となり、 Γ_z が長さ d の 3 乗で表わせることがわかる。さらに要素の z 軸まわりの回転の運動方程式をたてると、微小体積要素の慣性モーメントを dI 、 z 軸まわりの角加速度を $d\omega/dt$ 、要素に作用する外力による力のモーメントの z 成分を Γ_{ext} で表わすと、

$$dI \frac{d\omega_z}{dt} = d\Gamma_z + Y\Gamma_{ext} \quad (\text{A.34})$$

となる。典型的な長さが十分小さいので、微小量 d のオーダーをカウントすると、慣性モーメントは、密度 ρ は一定として、

$$dI_{ij} = \int \rho r_i r_j dV \sim O(d^5) \quad (\text{A.35})$$

となり、外力による z 軸まわりの力のモーメントは、

$$d\Gamma_{ext} = \int_{dV} (\vec{r} \times \vec{f}_{ext}) \cdot \hat{e}_z dV \sim O(d^4) \quad (\text{A.36})$$

となる。式 A.34 が成立するためには、 $O(d^3)$ のオーダーで $d \rightarrow 0$ のときに $d\Gamma_z \rightarrow 0$ となる必要がある。このことから、式 A.33 より、

$$\sigma_{yx}(\vec{r}) = \sigma_{xy}(\vec{r}) \quad (\text{A.37})$$

が導ける。そして同様に x 軸、 y 軸まわりでも考えると、式 A.31 が得られる。もしも非対称項があれば、物体の各位置で角加速度が無限大になってしまうため、現実的ではない。また、応力テンソルが対称テンソルであることは、応力テンソルが対角化可能であることを示すので、「主応力成分」などを考えることができるようになるため、物理の計算においては有用な性質である。

ポアソン比

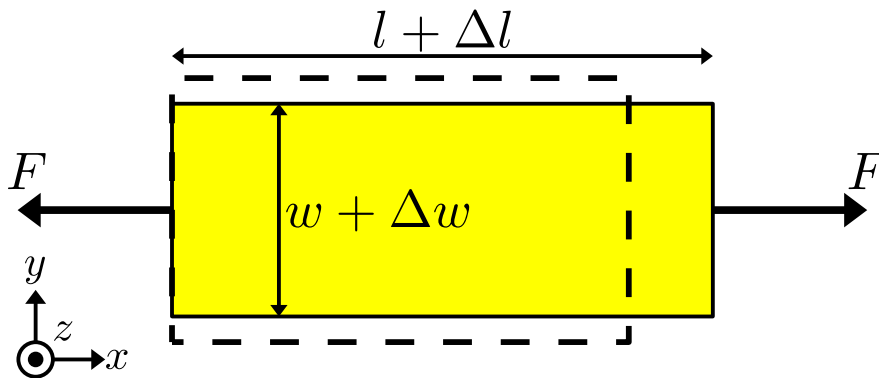


図 A.4 直方体の弾性体を x 軸方向に引っ張ると y および z 軸方向に縮む。変形前の直方体を点線で、変形後の直方体を実線 (黄色塗り潰し) で示した。変形前は x 軸方向の長さが l 、 y 軸方向の長さが w だったとし、変形後はそれぞれの方向に Δl 、 Δw だけ長さが増加したとする。

ポアソン比とは、縦方向と横方向のひずみの比である。図 A.4 のような等方で均一な直方弾性体を考える。 x 軸方向に引っ張ると x 軸方向のひずみは $\Delta l/l$ となる。それと同時に、弾性体はなるべく体積を保存しなければならないので y 軸、 z 軸方向にもある程度ひずむ。このとき y 軸方向に $\Delta w/w$ だけひずんだとき、ポアソン比は、

$$\nu = -\frac{\Delta l/l}{\Delta w/w} \quad (\text{A.38})$$

と定義される。弾性体が等方であるなら、 z 軸方向にも同じひずみが生じるのでポアソン比も同じである。ポアソン比は物質に固有な無次元の定数である。

応力とひずみの関係：構成関係式

弾性力学を考えるには、どれだけ応力をかけるとどれだけ変形するかを規定しなければならない。この応力とひずみの関係式のことを構成関係式という。ばねの復元力と伸長の関係式としてどの教科書にも記載されているのがフックの法則である。フックの法則は、1660年にロバート・フックが小さなひずみの範囲で力 \vec{F} は伸び \vec{x} に比例することを示した経験則である。

$$\vec{F} = k\vec{x} \quad (\text{A.39})$$

この「小さなひずみの範囲」は物質の性質ごとに異なるため、定量的に定義できないが、少なくとも自然状態からひずみを加えはじめたごく初期の復元力は線形応答を示すことがわかっている。フックの法則は経験則であるが簡単に確認することができるので、検証した実験を付録 D.1 章に記す。また、その比例定数 k は物質の種類だけでなく、温度などでも変化することには注意しなければならない。フックの法則を三次元弾性体の応力 σ とひずみ ϵ の関係に拡張する。前提として、ここで考える三次元物体のモデルは、変形前は応力がはたらいしていない自然状態にあるとし、等方材料で、フック則が現われる微小ひずみの近似が可能な範囲の変形であるとする。つまり

$$\sigma_{ij} \propto \epsilon_{kl} \quad (\text{A.40})$$

が成り立つものとする。その比例定数をヤング率という。ヤング率を E_{ijkl} とおくと、もし対称性を考えなければ、この比例の式には $3^4 = 81$ 通りもの係数が存在してしまうが、 σ と ϵ はいずれも対称テンソルなので、 (i, j) または (k, l) の組み合わせで独立な成分はそれぞれ 6 個ずつであり、 $6 \times 6 = 36$ 通りに減る。さらに、座標変換に対して関係式が不変であることなどを考慮していくと、(導出としていささか唐突であるのは否めないが) 比例定数を 2 つに絞ることができ、まとめると構成関係式 (フック則) が次のように表現することができるようになる。

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (\text{A.41})$$

λ と μ はそれぞれ体積弾性率、ヤング率 E とポアソン比 ν で次のように表わせる。

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A.42})$$

A.1 章で弾性体とは何かを語ったが、三次元弾性体においては式 (A.41) をみたく変形をしているとみなせる固体を「弾性体」と定義しなおした方が良いかもしれない。実験的

な経験則でしかない線形理論から始まって議論を進めたが、少なくとも微小ひずみの範囲では、いずれの一様等方な物体もこの枠組みから大きく外れることはない。

弾性エネルギー

ある弾性固体がつり合いの状態を保ったまま、表面に外力 \vec{f}_{ext} を受けて微小変形し、変位場 $\vec{u}(\vec{r})$ が $\vec{u}(\vec{r}) + d\vec{u}(\vec{r})$ に変化したとする。このとき、系全体のポテンシャルエネルギーの変化分を $\delta\mathcal{E}_{tot}$ とすると、物体が表面 S にされた仕事に等しいので、

$$\delta\mathcal{E}_{tot} = \iint_S \vec{f}_{ext} \cdot \delta\vec{u}(\vec{r}) dS \quad (\text{A.43})$$

と書ける。力のつり合い状態では表面で、

$$\vec{f}_{ext} = \sigma \cdot \hat{n} \quad (\text{A.44})$$

なので、ガウスの発散定理 (式 (A.22)) より、

$$\delta W_F = \iiint_V \frac{\partial(\sigma_{ij}\delta u_i)}{\partial x_j} dV = \iiint_V \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dV + \iiint_V \sigma_{ij} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} dV \quad (\text{A.45})$$

と書ける。ここでまず第一項に注目すると、式 (A.25) のコーシーポアソンの条件から、体積力による効果を記述することがわかる。このことから第二項は残りの内部変形によるポテンシャルエネルギーの変化を表わしていることになり、弾性体においては弾性エネルギーの変化に対応する。第二項を $\delta\mathcal{E}_{el}$ とすると、応力の対称性から被積分関数は、

$$\sigma_{ij} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} = \frac{\sigma_{ij} + \sigma_{ji}}{2} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} = \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij} \quad (\text{A.46})$$

と変形できるため、弾性エネルギーの変化は、

$$\delta\mathcal{E}_{el} = \iiint_V \sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij} dV \quad (\text{A.47})$$

となる。ここで、任意の点 \vec{r} での弾性エネルギー密度を $e_{el}(\vec{r})$ とすると、系全体の弾性エネルギー \mathcal{E}_{el} は

$$\mathcal{E}_{el} = \iiint_V e_{el}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A.48})$$

と書けるので、その変化量は

$$\delta\mathcal{E}_{el} = \iiint_V \delta e_{el}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A.49})$$

となる。式 (A.47) と式 (A.49) を比較すると、弾性エネルギー密度の変化は次のようになる。

$$\delta e_{\text{el}} = \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \quad (\text{A.50})$$

更に計算を進める下準備として、 $\delta \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$ を考えてみる。式 (A.41) より、 δ_{ij} がクロネッカーデルタであることに注意して、

$$\delta \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\delta \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (\text{A.51})$$

なので、

$$\delta \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta \epsilon_{kk} \delta_{ij} \epsilon_{ij} \right) \quad (\text{A.52})$$

$$= \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \delta \epsilon_{ij} \quad (\text{A.53})$$

$$= \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \quad (\text{A.54})$$

である。このことから、式 (A.50) は、

$$\delta e_{\text{el}} = \frac{1}{2} (\delta \sigma_{ij} \epsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}) \quad (\text{A.55})$$

と書けるので、

$$e_{\text{el}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\vec{r}) \epsilon_{ij}(\vec{r}) \quad (\text{A.56})$$

となる。よって、式 (A.48) から系全体の弾性エネルギーは、

$$\mathcal{E}_{\text{el}} = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij}(\vec{r}) \epsilon_{ij}(\vec{r}) dV \quad (\text{A.57})$$

と表わせる。この式は、 $F = kx$ となる線形バネの弾性エネルギーの表式 $\mathcal{E} = kx^2/2 = Fx/2$ と同じ形をしている。以上の体積のある材料の計算理論を拡張して、本文ではうすい構造の弾性変形理論を議論する。

A.2 重力たわみによる曲げ剛性の測定方法

本文ではうすい材料の曲げ変形について議論するが、このとき材料の曲げ剛性は重要なパラメータとなる。曲げ剛性はヤング率と材料の形状から計算することができるが、材料によってはヤング率が未知であったり、計測が難しい場合が多い。そのため本研究においては、重力によるシートのたわみ曲線から曲げ剛性を測定する手法を用いた。

たわみ形状の計算理論

ここで、図 A.5 のように、長方形シートの一辺を水平方向にクランプ (角度と変位を固定) して、残りの辺を自由端とする。シートの厚みを h 、奥行きを w 、中立面に沿った経路を s として、固定辺が $s = 0$ 、向かい合う辺が $s = L$ であるとする。図 A.5 の赤で囲んだ、 s から $s + ds$ にある微小長さの領域を考える。 s における単位接線ベクトルを $\hat{\mathbf{t}}(s) = \cos \phi(s)\hat{\mathbf{e}}_x + \sin \phi(s)\hat{\mathbf{e}}_y$ 、単位法線ベクトルを $\hat{\mathbf{n}}(s) = -\sin \phi(s)\hat{\mathbf{e}}_x + \cos \phi(s)\hat{\mathbf{e}}_y$ とする。断面に隣接する領域からせん断力 \mathbf{Q} と曲げトルク \mathbf{M} を受けるのでモーメントのつり合いは、

$$\mathbf{M}(s + ds) + \mathbf{M}(s) + \frac{ds}{2}(-\hat{\mathbf{t}}) \times \mathbf{Q}(s) + \frac{ds}{2}\hat{\mathbf{t}} \times \mathbf{Q}(s + ds) = \mathbf{0} \quad (\text{A.58})$$

と書ける。

ここでシートの密度を ρ として、せん断力の大きさを $Q(s) = \rho ghw(L - s) \cos \phi(s)$ と表わすと、重力とのつり合いから $\mathbf{Q}(s) = -Q(s)\hat{\mathbf{n}}$ 、 $\mathbf{Q}(s + ds) = Q(s + ds)\hat{\mathbf{n}}$ である。またトルク \mathbf{M} の大きさを $M(s)$ と表わすと、 $\mathbf{M}(s) = -M(s)\hat{\mathbf{e}}_z$ 、 $\mathbf{M}(s + ds) = M(s + ds)\hat{\mathbf{e}}_z$ である。式 (A.58) の両辺を ds で割ると、

$$\frac{M(s + ds) - M(s)}{ds}\hat{\mathbf{e}}_z + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{t}} \times (Q(s) + Q(s + ds))\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.59})$$

となる。 ds が十分小さいとすると、

$$\frac{dM(s)}{ds}\hat{\mathbf{e}}_z + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{t}} \times 2Q(s)\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.60})$$

となり、曲げ剛性の定義から $M(s) = -B \frac{d\phi(s)}{ds}$ 、そして $\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_z$ であることに注意すると、

$$B \frac{d^2\phi(s)}{ds^2} = -\rho ghw(L - s) \cos \phi(s) \quad (\text{A.61})$$

と書き換えることができる。この ϕ の微分方程式を、セクション A.2 で説明する幅 $w = 211.2\text{mm}$ 、 298.0mm の下で、曲げ剛性 B を適当に指定して、次の境界条件の元で 4 次ルンゲクッタ法を用いて数値的に解いた。

$$\phi(s = 0) = 0 \quad (\text{A.62})$$

$$\frac{d\phi}{ds}(s = L) = 0 \quad (\text{A.63})$$

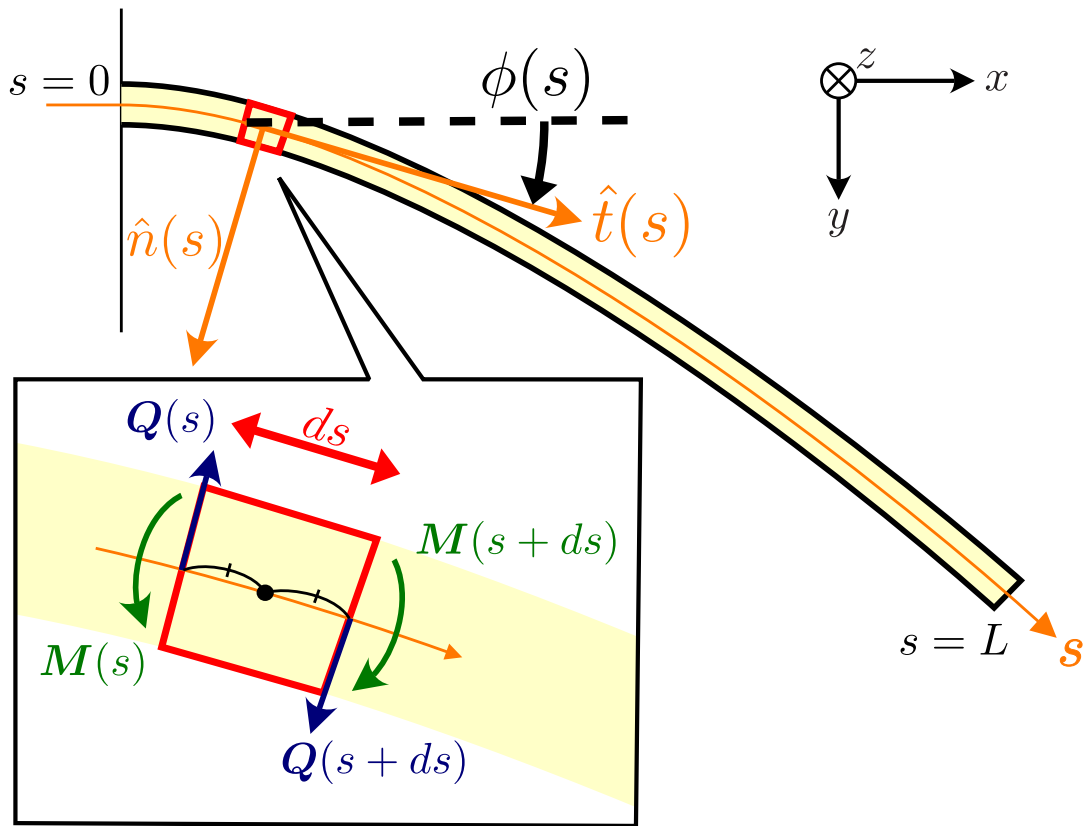


図 A.5 長さ L の平板を重力によりたわませた場合の断面の模式図。奥行き方向には同じ形状となる。中立面に沿って座標 s を設定すると、 s はたわみ曲線となり、各点の接線方向の単位ベクトル $\hat{t}(s)$ は x 軸から角度 $\phi(s)$ だけ傾く。一端の $s=0$ で $\phi=0^\circ$ とする。 s から $s+ds$ の領域だけ抜き出して考えると、断面にせん断力 Q とトルク M が作用する。

さらに初期条件 $d\phi(s=0)/ds$ を適当に変化させて、最終状態が式 (A.63) の条件に最も一致した場合の結果を採用するシューティング法を用いて計算した。

任意の s で $\phi(s)$ が得られたので、 (x, y) に変換して台形積分することで、指定した曲げ剛性 B の場合のシート中立面の (x, y) 形状を決定できる。曲げ剛性 B を適当に変化させて中立面のたわみ形状を、 x, y の比率が $1:1$ になるようにグラフにプロットして出力し、次章で説明する実際のシートのたわみを撮影した画像と比較して、最も一致する曲げ剛性の曲線からシートの曲げ剛性を決定した。また数値計算において、 ds の大きさを適当に変化させて計算しても、グラフに顕著な違いが生じないような ds が選択されていることは確認した。

たわみ形状の画像撮影

実験に使用するシートのたわみ形状の画像を写真撮影で取得した。図 A.5 と同じ状況になるように、水平面の縁からシートを L だけ飛び出した状態でクランプして重力でたわませ、横からデジタルカメラ (PENTAX K-70/RICHO) で撮影した。このとき、シートが飛び出す水平方向を x 、鉛直方向を y とし、シートがクランプを離れて曲がり始めた点を原点とした。画像上の長さで現実の長さを対応させるために、 x に沿って、奥行きはシートの手前の辺に合わせてスケールを固定した。また可能な限りたわんだシートの射影を撮影するために、カメラは十分離れた (2m) 位置に設置し、視線軸と $x-y$ 平面が直交し、かつ画像の中心に $x-y$ 平面の原点が位置するように調整した。さらにカメラのレンズ歪みを補正するために、手ぶれ補正などカメラ内部の補正機能はすべてオフにし、撮影した画像を画像編集ソフト Adobe Photoshop 22.4 のレンズ補正機能を利用した。Photoshop は主要な市販のデジタルカメラで使用されるレンズの歪みプロファイルを提供しているので、使用したレンズ : smc PENTAX-DA 18-135mm F3.5-5.6 ED AL[IF] DC WR(raw) のプロファイルから歪みを画像の補正した。これらの補正により、画像にあるスケールの目盛は十分一定の間隔であった。

図 A.6 のように、補正したシートの画像に前章で出力した各曲げ剛性で得られるたわみ曲線のグラフを重ね、 $s = L$ の点が最も一致するグラフを読み取り、シートの曲げ剛性を得た。

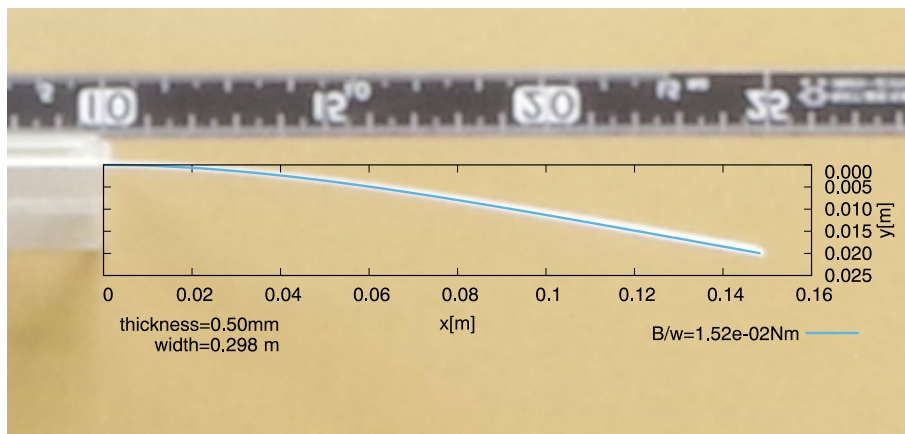


図 A.6 シート端の重力によるたわみの写真と理論的に計算したグラフを重ねた画像のうちの一つ。グラフは最も一致した曲線の結果のみ表示している。たわみ実験は複数の同じ材質のシート、すべての辺、表と裏で計測し平均をとる。

ユポ紙の曲げ剛性

3.3 章で使用するユポ紙の曲げ剛性を測定した。シートは A4 サイズのもを使用したもので、奥行き幅は $w = 211.2\text{ mm}, 298.0\text{ mm}$ であった。シートの飛び出しは $L = 150\text{ mm}$ とした。シートには保管状態により多少の自発曲率が生じている可能性があり、また RES の実験に用いたユポ紙には紙の目、つまり明確な異方性があることから、シートの表面、裏面、そして紙の目に水平方向、垂直方向すべての辺のそれぞれでたわみを撮影し、そこから紙の目に沿った方向の平均 $\langle B/w \rangle_{\parallel}$ 、紙の目に垂直な方向の平均 $\langle B/w \rangle_{\perp}$ 、全方向の平均 $\langle B/w \rangle$ を求め、結果を表 A.1 に示した。

表 A.1 単位幅あたりの曲げ剛性の平均の結果

| $h(\text{m})$ | $\langle B/w \rangle_{\parallel} (\text{Nm})$ | $\langle B/w \rangle_{\perp} (\text{Nm})$ | $\langle B/w \rangle (\text{Nm})$ |
|----------------------|---|---|-----------------------------------|
| 0.5×10^{-3} | $(23 \pm 5) \times 10^{-3}$ | $(19 \pm 5) \times 10^{-3}$ | $(22 \pm 3) \times 10^{-3}$ |
| 0.4×10^{-3} | $(12 \pm 2) \times 10^{-3}$ | $(7 \pm 2) \times 10^{-3}$ | $(9 \pm 2) \times 10^{-3}$ |

付録 B

三次元空間座標の計測

B.1 カメラの基本構造

光学計測を実施するにあたって、デジタルカメラを利用すれば特殊な機材などを導入する必要がない利点がある。ただし、レンズ複数枚用いた一般的なデジタルカメラによって光学計測をするには、いくつかの点に注意しなければ精度の良い結果は得られない。基本的には中学校理科のレンズ光学の復習であり、計測システムとしてカメラのキャリブレーションなども自動で実行できるプログラムは一般に公開されているが、ここではその計算原理をおさえるためにも、カメラの構造についての前提をまとめる。デジタルカメラの設定項目には、焦点距離、フォーカス、しぼり (F) 値、シャッタースピード、ISO 感度がある。単純なレンズの光路モデルを考えて、最適な各設定項目を決定する。またレンズ歪みや色収差も計測に影響するので説明する。

焦点距離は、レンズに入射した平行光が一点に集まる点（つまり焦点 \times ）とレンズ間の距離である（図 B.1(a)）。カメラは一般的に複数のレンズの組み合わせで集光するが、見かけの上で単一レンズでモデル化してレンズを通る光路を考える。光軸上にある被写体までの距離が無限大のとき、レンズを通過した光が集まる一点を焦点、レンズ中心から焦点までの距離を焦点距離という。焦点距離が近いほど、画角（撮影できる範囲）は大きくなり、遠いほど分解能が大きくなる。被写体が無限遠にあれば撮像素子は、焦点の位置にあればピントが合う（恒星が小さく、はっきり、点として写る）。しかし有限距離の場合、像は焦点と少しずれたところに結像するので、フォーカスを合わせる（ピント調整する）必要がある（図 B.1(b)）。この時、ピントが完全にあっていなくても、主観的にピントボケが気にならないフォーカスの誤差範囲を許容錯乱円として図に表すことができる。この範囲内であれば、入射光角で示した程度のずれに抑えられる。しぼり値はレンズに入射する

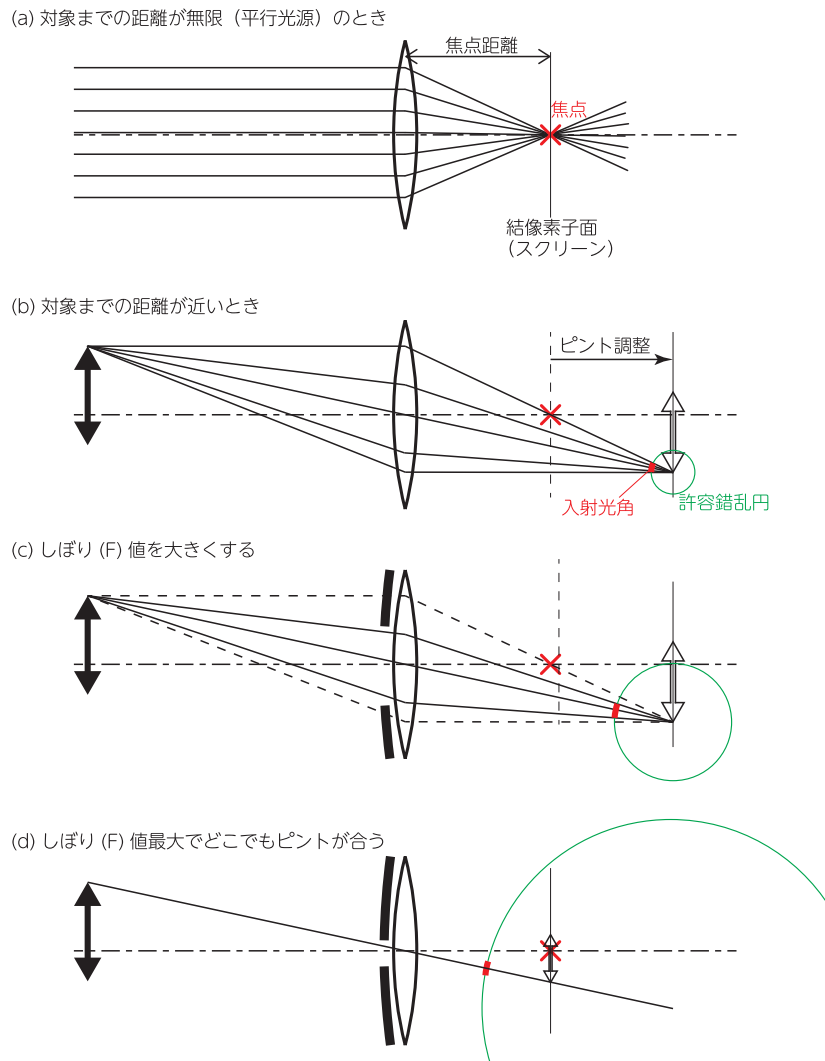


図 B.1 (a) 平行光源からレンズを通過した光は焦点を通る。(b) 被写体までの距離が近いとピントがずれる。(c) しぼりを大きくすると、レンズに入射する光が制限されて、ピントボケが判別できない入射光角度をとる許容錯乱円は大きくなる。(d) しぼりを極限まで大きくすれば（ピンホール）、許容錯乱円の半径は無限に大きくなり、どこでもピントが合う。

光量を調整する。しぼり値を上げてしぼることによって画像の明るさを暗く調整できるが、その真髄は許容錯乱円の拡大にある。図 B.1(c) に示したように、しぼりでレンズの入射光を制限したことにより、矢印の先端を結像させる光路が減り、許容錯乱円を拡大しても入射光角は (b) と変わらず同程度のピンボケになる。極限までしぼれば、被写体までの距離とフォーカスをどう調節してもピントが合う。ただし極限まで入射光が少ないのでほぼ

何も写らない。シャッタースピードは撮像時間で、長ければ入射光が増え明るく写る。しぼり値が大きくてもシャッタースピードを長く取れば、十分な光が確保できる。ただし被写体とカメラに相対的な動きがある場合、ブレが生じてしまう。入射する十分な光量を確保するために、ISO 感度を上げる方法もあげられる。感度を上げると、各画像素子の光検出のしきい値が下がり、わずかな光量でも写るようになる。ただし暗電流などに起因するノイズが大きくなる点に注意しなければならない。三次元計測の対象が静止しているなら、フォーカスは焦点位置（無限）、しぼり値は最大、シャッタースピード長めにすれば良いし、逆に動いている対象であれば、フォーカスは合わせた上で、しぼり値は最小、シャッタースピードをなるべく短かくすれば良い。

カメラにはレンズが球面に近いのに対して、撮像素子は平面であるため、人間の眼球の網膜とは違い画像にレンズ歪みが発生する。画像の中心から離れるほど画像が引き延ばされたり縮んだりする。さらに光の波長による屈折率の差から、画像中心と縁近くでプリズムのように光の分散が生じる。これらを修正するためのレンズプロファイルを用いて補正処理を行う。一部のデジタルカメラでは補正機能が内蔵されている。コンピュータソフトウェアとしては、Photoshop (adobe) で補正処理ができる。本研究の測定では使用したカメラ (RICOH IMAGING PENTAX K50) の内蔵補正の精度が悪かったため、Photoshop で補正した。

見かけの焦点距離

多くのデジタルカメラの複レンズ構成では、入射光路から割り出した見かけのレンズ中心を特に主点とよび、主点と撮像素子間の距離が焦点距離である。カメラの設置座標点 \mathbf{P} は厳密には主点の座標であるが、複レンズの構成がわからないため、これをカメラ外部から特定することは難しい。レンズに構成によっては、レンズ群の外側に主点がある場合も考えられる。2.3.5 章の図 2.9 において特定したいのは、カメラの視線軸と対象点方向 \hat{s} とのなす角度 Φ であり、撮影画像から測定可能な写真空間内の動径 r と三角比の対応から算出される見かけ焦点距離 a が必要となる。これらの単位は (pixel) で考えるのが適切で、これは撮像素子上の色情報を感知する最小単位であり、写真空間における長さの単位となる。つまり、 a は現実空間の長さではなく、撮影した画像データから決定しなければならないカメラの構成パラメータである。そのために、測定に使用するカメラで撮影した写真空間の距離 \tilde{r} と、現実空間における角度 $\tilde{\Phi}$ をそれぞれ測定し、

$$a = \tilde{r} / \tan \tilde{\Phi} \quad (\text{B.1})$$

として見かけの焦点距離を特定する。

ここで注意することがいくつかある。まず、焦点距離 a はカメラの機種や装着レンズ型ごとに異なり、同一機種・レンズ型でも、撮影記録する写真、または動画の解像度、光学ズームはもちろんのこと、ピントの調整でもレンズが動いて変化してしまうことである。計測システムとして、カメラの現実空間位置を完全に固定した後にキャリブレーションを実施すれば、主点の位置も併せて特定できる。しかし実験において、カメラの位置を動かしたり別の測定システムを構築したりするが多かったため、カメラの構成パラメータとしてカメラごと個別に焦点距離 a を特定した。基本的にはズームレンズの場合は最も焦点距離が近い状態 (最も画角が広い状態) で、ピントは ∞ に合わせた。ピント調整ができないので、接写は難しく、最大限 F 値を大きくして、つまりしぼりを絞ってピンホールカメラに近い状態にして、撮影する必要があった。ピントと F 値の関係については B.1 で詳しく解説する。

次に、複数レンズの配置精度や手ぶれ補正の機能などにより、撮像素子の中心が視線軸に一致しない場合があることである。厳密には写真空間から遠近法における消失点を特定し、ここを写真空間の原点とすれば、視線軸と原点が一致する。画面の中心が消失点となっていれば問題ないが、ずれがあれば測定誤差の原因になることには注意したい。影響の大きさは不明だが、測定においてはいずれのカメラでも手ぶれ補正機能を OFF にして測定を実施した。ズームレンズで焦点距離を変えたときに、画像の中心に写る点の位置が変化することは確認されたので、複レンズ群の各中心点もどこまで精度良く視線軸に乗っているかは不明である。

そして最後にレンズの歪曲収差の影響があることである。歪曲収差とは、レンズ歪みとも呼ばれ、例えば魚眼レンズが想像しやすいが、画像の中心付近と縁付近で結像倍率が変わることで生じてしまう。設計精度の良いカメラのレンズは、しぼり位置や復レンズ配置の対称性などから極力レンズ歪みを抑えてある。つまり写真空間で r が大きく異なると、測定精度に影響することに注意しなければならない。

図 B.2(a) に示したカメラは、PENTAX(RICHO) K-70 で、レンズは smc PENTAX-DA 1:3.5-5.6 18-55mm AL WR(ϕ 52mm) である。動画計測も実施することを想定して、動画モードで方眼紙を撮影した。カメラと方眼紙は水平なテーブルに固定し、方眼紙の縦の中心線が写真空間の Y 軸に一致するようにした。撮影した動画から静止画を同じ画像サイズ (1920 × 1080) で切り出し、レンズひずみの補正をした上で、図 B.2(c) のように写真空間に Y 軸に並行になる垂直線を何本か引いた。この垂直線の X 座標が \tilde{r} に一致し、方眼紙との交点から現実空間での方向を割り出せば、図 B.2(b) のように各線と視線軸のなす角度 $\tilde{\phi}$ と、ついでに現実空間での見かけのレンズ中心点 P もわかる。複数本の

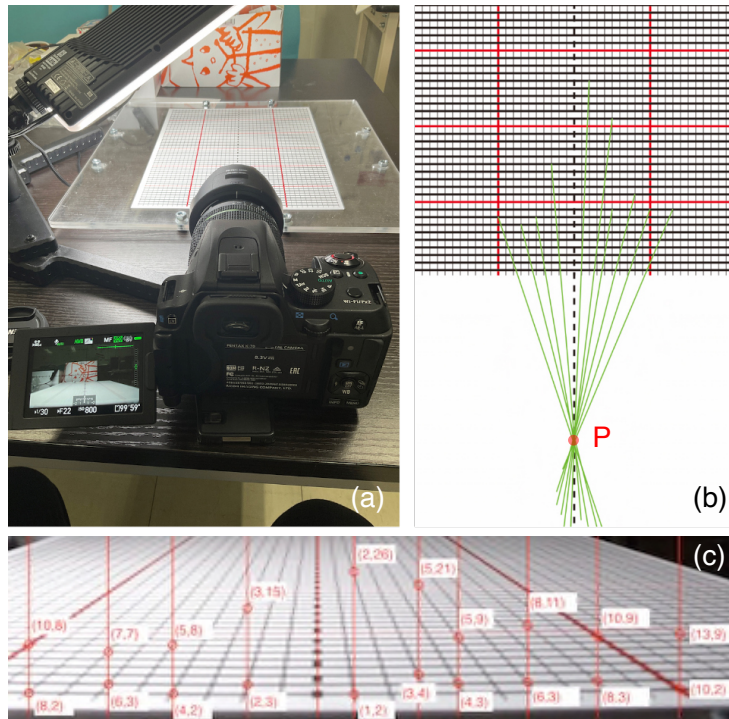


図 B.2 (a) 見かけの焦点距離測定のためのセットアップ。ピントやズームを設定したカメラを水平面上に置き、水平面上の方眼紙を撮影する。すると写真の下半分に (c) のように方眼紙が写るので、写真に複数の垂直線を引き、それぞれの垂直線が方眼紙のどの座標を通るか少なくとも 2 点以上計測する。垂直線までの距離が \tilde{r} である。そして (b) のように写真空間の垂直線群は、現実空間ではカメラの視線軸と角度 $\tilde{\Phi}$ で見かけのレンズ中心 P と交差する線の集まりになる。

垂直線から $a = \tilde{r} / \tan \tilde{\Phi}$ を計算し、平均をとって見かけの焦点距離を決定した。結果は $a = 1680 \pm 30$ pixel だった。このとき、歪曲収差の影響で \tilde{r} の大きさに依存して a が変化しないか注意したが、測定誤差の範囲でその影響は確認できなかった。

付録 C

使用した機器の設定方法

C.1 カuttingプロッター Silhouette CAMEO 3 のカット設定例

RES や紙ばねの紙模型などの作成において、紙の切り出しを機械制御できるカuttingプロッターを利用した。装置は、Silhouette CAMEO 3 (グラフィテック) を使用した。カuttingプロッターの利点は、複雑な境界のカット、模型の量産、そして均一な切り込み深さのハーフカットが可能なことである。ただし、カットする紙の厚さや硬さを考慮してカット圧や速度を手動で入力しなければならないため、最適な設定値を探すために試し切りをしなければならない。特に紙の硬さは気温や湿度によっても顕著に変化するようで、同じ設定でも日によっては最適なカットができない場合があった。

最適なカット設定のパラメータを割り出すため、各パラメータを変化させて切り込みを RES に使用するシートにプロッターで入れた。得られた最適なカットパラメータを表 C.1 に示す。ただし、シートの材質、厚み、目の方向、表面加工から、湿度、劣化具合などでも切れ方が変化していると思われる。ここで得たパラメータは参考になるはずだが、最適なカuttingを保証するものではない。規則性も見付けられなかったので、あくまでもただの目安として記載する。

表 C.1 シルエットカメオ 3 を専用ソフト：シルエットスタジオで制御する。そのときの各設定のうち、うまくカットできたパラメータを示す。カットツールはオートブレードを使用した。トラッキング強化オプションはチェックを入れた。

| | ケント紙 0.4mm 厚 | ユポ紙 0.25mm 厚 |
|---------------|--------------|--------------|
| 刃出し量 (カット) | 3 | 3 |
| 圧力 (カット) | 24 – 26 | 15 |
| 速度 (カット) | 4 | 5 |
| パス (カット) | 1 回 | 1 回 |
| 刃出し量 (ハーフカット) | 2 | 1 |
| 圧力 (ハーフカット) | 8 – 10 | 10 |
| 速度 (ハーフカット) | 4 | 5 |
| パス (ハーフカット) | 1 回 | 1 回 |

C.2 有限要素法シミュレーションソフト ABAQUS/CAE の設定手順

市販されている解析ソフトの操作方法であり、学問的な見解はないが操作が比較的難解であるので、シミュレーションを再現できるように RES の解析を例に設定の方法をまとめる。

ABAQUS/CAE を起動すると、セッションの開始ウィンドウ (図 C.1(a)) が表示される。ここでモデルデータベースの作成項目の Standard/Explicit モデルを選択する。モデルデータベースを新規作成しても、デフォルトでは Standard/Explicit モデルが選択される。ABAQUS/CAE ウィンドウの左側にはモデルツリー (図 C.1(b)) が表され、この各項目で計算の設定をする。

パート

計算するモデルの形状をモデルツリーの「パート」の項目で設定する。ABAQUS で折り目を設定することは困難だったので、Base、Arm、Tab、Hub をそれぞれ定義し、後で各パートを結合させて RES を組む。モデルツリーのパートをダブルクリック (または右クリックして作成、または上部のメニューバーのパートから作成) する。RES の弾性シートを設定するために、モデリング空間は 3 次元、タイプは変形体、形状はシェル、近似サ

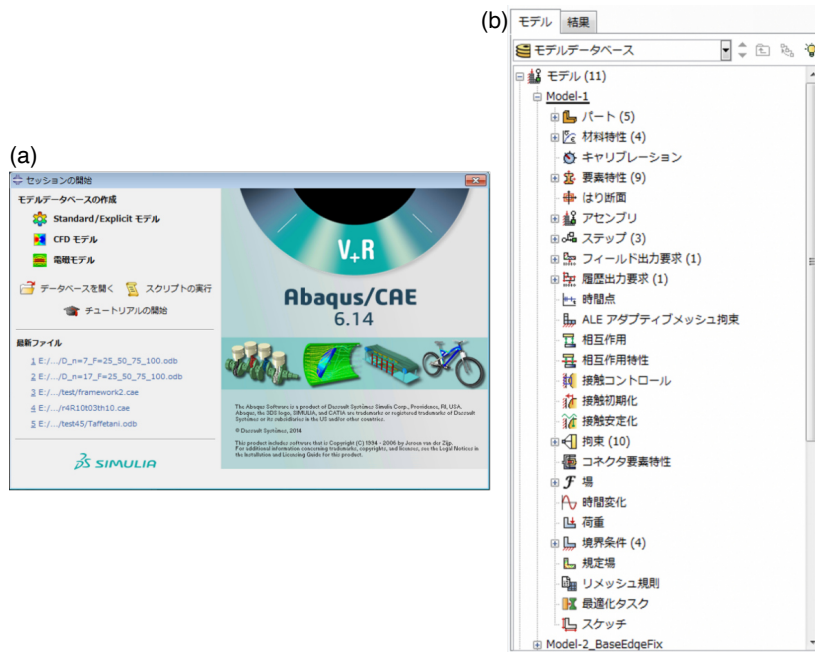


図 C.1 (a) セッションの開始画面。(b) モデルツリー

イズは 1 を入力した (図 C.3(a))。続けるを押し、図 C.3(b) に従って各パートの形状を設定する。

中心の正三角形のパート (Hub)、直角三角形のパート (Tab)、平行四辺形のパート (Arm) と、これらのパートが切り抜かれたパート (Base)、Base を固定する床の役割を持つパート (Base2) を作成した。Base の切り抜かれた部分は頂点を指定して描く多角形として入力するが、各頂点座標は幾何的な計算で割り出した。図 C.3(b) の点 O を原点とすると、各頂点の座標は、 $A(-\sqrt{3}a/2 - b, 3a/2 + b/\sqrt{3})$, $B(-\sqrt{3}a/2, 3a/2)$, $C(-\sqrt{3}a/2 + b, 3a/2 + b/\sqrt{3})$, $D(\sqrt{3}a + b, b/\sqrt{3})$, $E(\sqrt{3}a, 0)$, $F(\sqrt{3}a, -2b/\sqrt{3})$, $G(-\sqrt{3}a/2, -3a/2 - 2b/\sqrt{3})$, $H(-\sqrt{3}a/2, -3a/2)$, $I(-\sqrt{3}a/2 - b, -3a/2 + b/\sqrt{3})$ となる。Base の外縁の半径は $\phi = 60$ から $\phi = 80$ で設定したが、このとき駆動トルクの計算においては差異が見られなかった。トルクの実験測定で用いた RES 模型は外縁が円形というわけではなかったもので、中心から境界までの距離がおおよそ一致する $\phi = 60$ を採用した。 $\theta = 120^\circ$ における耐荷重測定実験では、模型の外縁は円であったので、対応するように $\phi = 70$ で計算した。

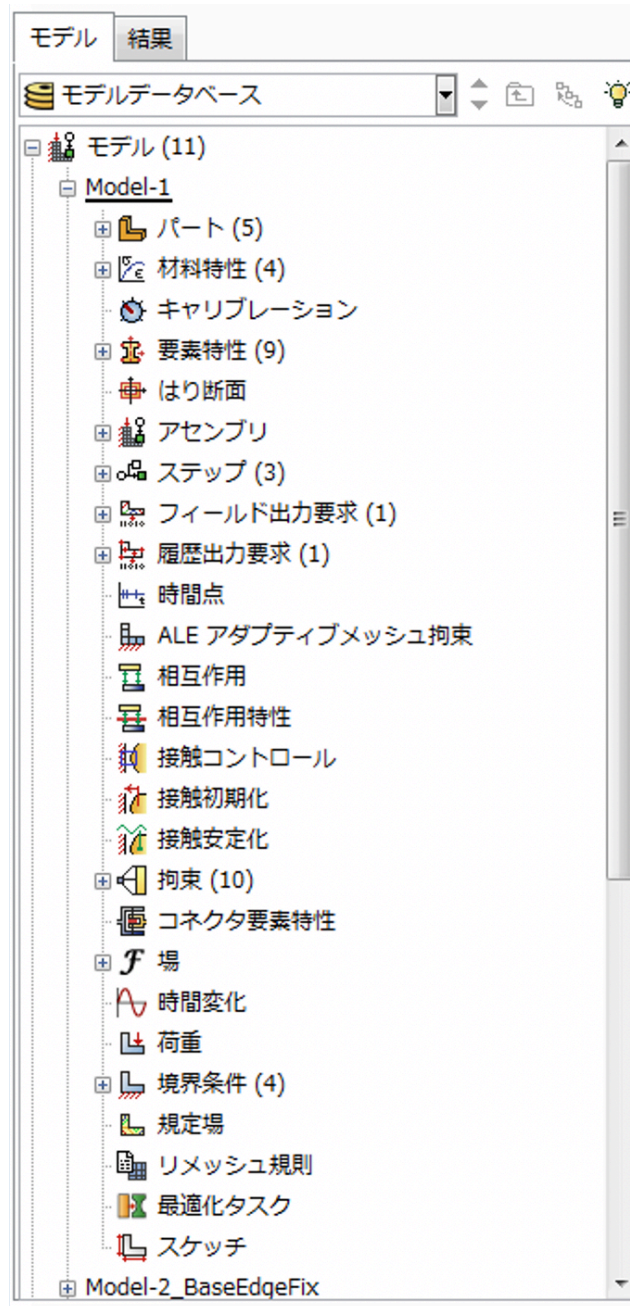


図 C.2 モデルツリー

材料特性

材料のヤング率とポアソン比を「材料特性」で定義する。モデルツリーの材料特性をダブルクリック（または右クリックして作成、または上部のメニューバーの材料特

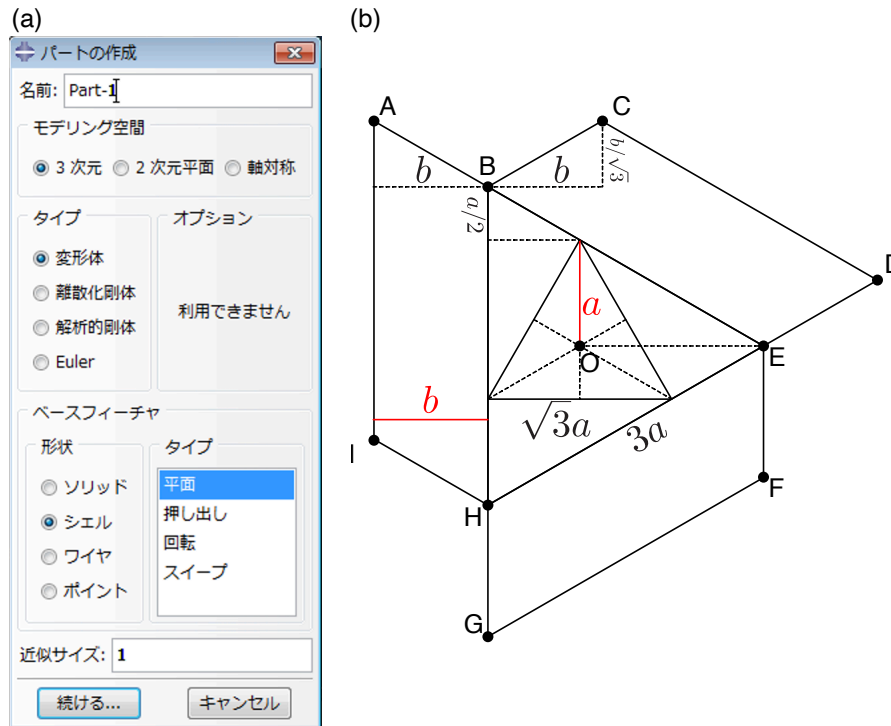


図 C.3 (a) パートの作成画面。(b) 各パートの形状計算。

性から作成) する。材料挙動で機械的、弾性、弾性の項目を選択する。ここでは実験で使用したユポ紙に合わせたヤング率 EPa とポアソン比 ν のパラメータを設定する (図 C.4)。シートの単位幅あたりの曲げ剛性 B/w はヤング率 E とポアソン比 ν による関係式 $B/w = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ で決まる。このことと、実験的に求めたユポ紙の単位幅あたりの曲げ剛性の平均が $\langle B/w \rangle = 22 \times 10^{-3} \text{Nm}$ であったことを考慮して、 $(E, \nu) = (2.1 \times 10^9, 0.0), (1.9 \times 10^9, 0.3), (1.5 \times 10^9, 0.5)$ の3通りの組み合わせを定義した。ただし、幅 w は主として曲げ変形が生じている Arm 部の幅 b を代入した ($w = b = 18 \times 10^{-3}$)。トルク実験測定の結果に最も近いパラメータは $(E, \nu) = (1.5 \times 10^9, 0.5)$ だった。また、床面の役割りを持つ Base2 は十分硬くするため、鉄のパラメータを参考にして $E_{Fe} = 200 \times 10^9$, $\nu_{Fe} = 0.3$ を入力した材料特性も定義した。

要素特性

シェルの厚みと、材料特性、厚さ方向の積分点の数を「要素特性」で定義する。モデルツリーの要素特性をダブルクリック (または右クリックして作成、または上部のメニューバーの要素特性から作成) する。カテゴリはシェル、タイプは均質を選択した (図 C.5(a))。

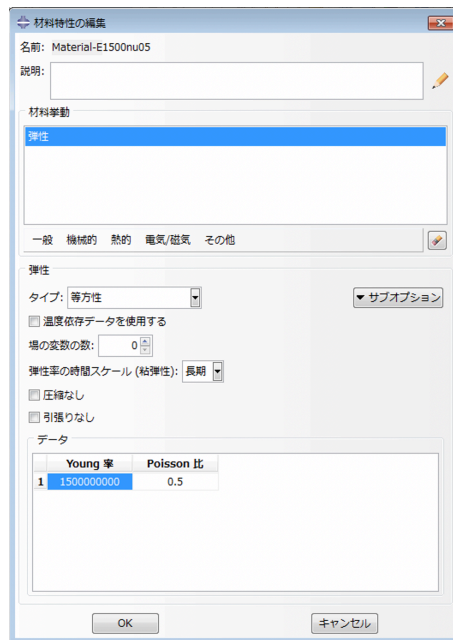


図 C.4 材料特性の設定

要素特性を定義したら、各パートに要素特性を割り当てる。モデルツリーで定義したパート内の「要素特性割り当て」をダブルクリックし、ビューポートから割り当てる領域を選択して、完了を押す。要素特性の項目で定義した要素特性を選択し、板厚はセクションから、シェルオフセットは定義：中央サーフェスを選択した (図 C.5(b))。

アセンブリ

各パートの初期配置を「アセンブリ」で定義する。ここで配置したパートはインスタンスとも呼ばれる。モデルツリーのアセンブリ：インスタンスをダブルクリック (または右クリックして作成、または上部のメニューバーのインスタンスから作成) する。インスタンスタイプはインディペンデントを選択し、組み合わせたモデル全体でメッシュを切る (計算する要素を設定する) ようにした。Hub を 1 つ、Tab を 3 つ、Arm を 3 つ、Base と Base2 を適当に配置したら、ビューポートを見ながら、ツールボックスの「インスタンスの移動」「インスタンスの回転」などを使いつつ各インスタンスを組んだ。例えば、3.3.4 章の RES の耐荷重実験を再現する計算では図 C.6 のように $\theta = 120^\circ$ の状態の RES と一致するように配置した。

次にモデルツリーのアセンブリ：インスタンス：どれかひとつのインスタンスを開くと「メッシュ」という項目がある。メッシュをダブルクリックし、メニューバーからシード：

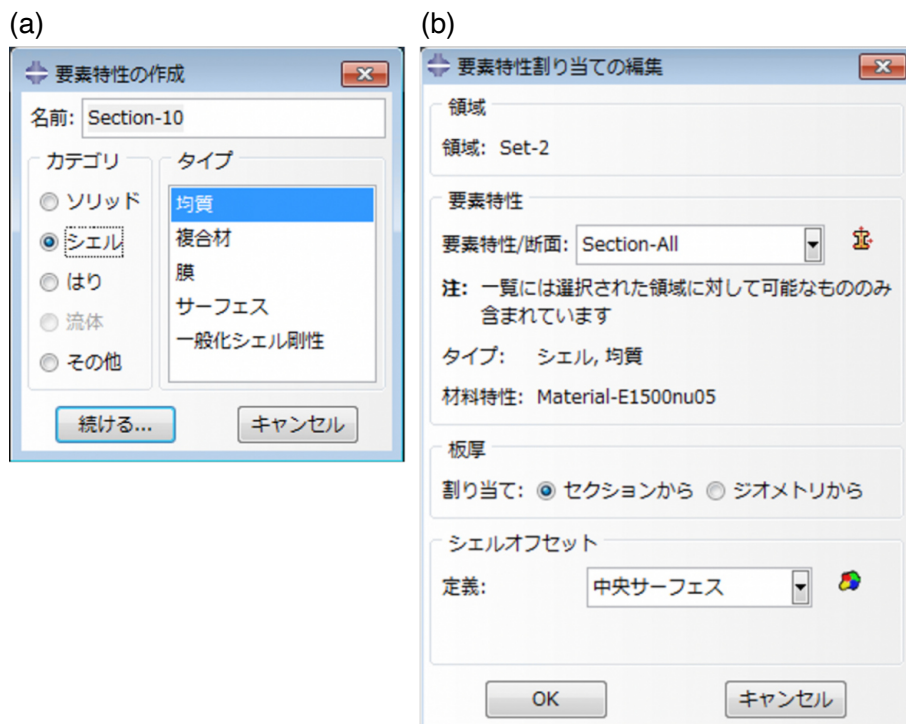


図 C.5 (a) 要素特性の設定。(b) 要素特性の割り当て設定。

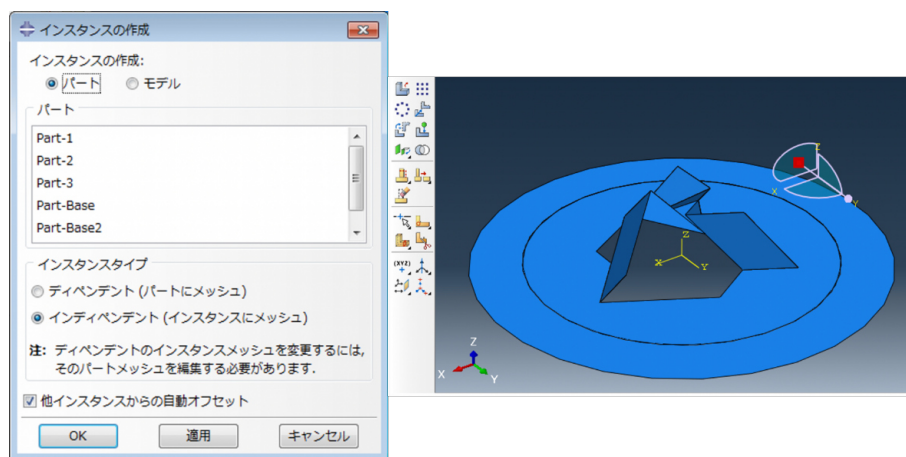


図 C.6 インスタンスの配置設定とインスタンスを組んだ状態。

インスタンスを選択した。してビューポートでモデル全体を選択し、シード (メッシュ、要素の分割目安) を設定する。細かいシードを設定すると、大きな変形や面接触の相互作用を計算する時により正確な計算ができるが、その分計算時間が膨大になる。計算時間短縮のため、ある程度粗いシードを最初に設定して、うまく計算が完了すれば、細かいシー

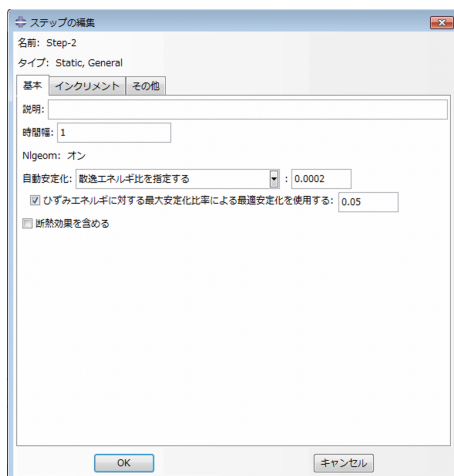


図 C.7 ステップの設定。基本タブ。

ドでもう一度計算し直して大きな誤差が生じないか確認するようにした。

ステップ

解析ステップを「ステップ」で定義する。モデルツリーのステップをダブルクリック (または右クリックして作成、または上部のメニューバーのステップから作成) する。デフォルトで設定されている”Initial” のステップは変更しない。RES の駆動は準静的な状況を考えるので、プロシージャタイプは一般：Static, General を選択した。基本タブでは時間幅を 1 に設定し、Nlgeom：オン、自動安定化：散逸エネルギー比を指定する：0.0002、ひずみエネルギーに対する最大安定化比率による最適安定化を使用する：0.05 を設定した (図 C.7)。インクリメントタブでは、時間増分の細かさを指定する。時間増分が細かいほど良い結果が得られることが多いが、計算時間が膨大になる。ひとまず、最大インクリメント数：1000、時間増分値：初期 0.01、最小 1E-008、最大 0.01 を設定して、座屈など速い変形が生じり場合はより細かい増分値を設定した。タイプは自動 (解の収束の速さで時間増分を調整する推奨設定) を選択した。後に設定する境界条件が途中で変化する場合は、ステップを追加して、境界条件の有効、無効を切り替えた。

フィールド出力要求

ひずみエネルギー密度の分布を出力するために、「フィールド出力要求」から E: 全ひずみ成分と、EE: 弾性ひずみ成分にチェックを入れた。

拘束

アセンブリでインスタンスを配置しただけでは、各インスタンスは力学的に繋がっていないので、結合条件を「拘束」で定義する。結合するにはあらかじめ結合面を定義しておく必要がある。モデルツリーのアセンブリ：サーフィスを開き、タイプはジオメトリを選択し、ビューポートから結合が生じる各インスタンスの辺をすべて定義する(辺は線だが、ここでは厚みを考えて面(サーフィス)で定義する)。モデルツリーの拘束をダブルクリックする。タイプは結合を選択し、結合する辺(サーフェスで定義)を2つ(マスタとスレーブ)を選択し、図 C.8 のように設定した。回転自由度を結合しないので、結合部分は理想的に自由回転できるヒンジを再現した。Base は床の役割りになる Base2 は Base の外縁境界で結合させた。

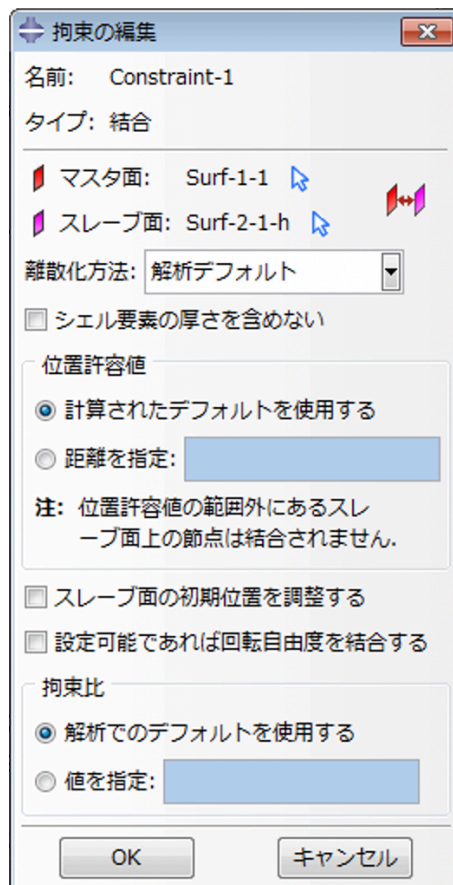


図 C.8 拘束の設定

他の設定項目は各状況の計算によって変わるので、各状況別に設定を示す。

駆動トルクの解析の設定 ($0^\circ < \theta < 120^\circ$)

$\theta = 0^\circ$ から Base を回転させ $\theta = 120^\circ$ まで動かし、また $\theta = 0^\circ$ に戻した時の駆動トルクを出力した。初期状態は $\theta = 0^\circ$ なので、アセンブリではすべてのインスタンスが平面に並ぶように配置した。

ステップ

この計算では回転駆動の方向が途中で不連続に変化するので、ステップを複数設定する。まず平坦状態 $\theta = 0^\circ$ から回転を与えると、面内応力が大きく計算が収束しない不具合があるので、少しだけ Tab を持ち上げる変形を最初に与えた。この初期伸長を Step-1 として Initial ステップの後に追加する。次に Base2 を $\theta = 120^\circ$ まで動かす Step-2 を追加する。さらにその後にもまた Base2 を $\theta = 0^\circ$ に戻す Step-3 を追加する。自動安定化の有無で計算したトルク曲線に変化がなかったため、時間短縮のため自動安定化は「なし」で計算した。

境界条件

モデルの境界に変位を「境界条件」で定義する。モデルツリーのステップをダブルクリックすると設定できる。3 つの Tab の 60° 角の頂点を「Tab3」とする。アセンブリ：集合から Tab3 を選択して Set として登録することができる。各ステップで設定する境界条件を C.2 に示す。境界条件の作成で、カテゴリはすべて機械的にした。ZSYMM($U3 = UR1 = UR2 = 0$) と ZASYMM($U1 = U2 = UR3 = 0$) はタイプ：「対称/反対称/完全固定」で設定できる。U3 は z 方向の変位だが、タイプ：「変位/回転」で設定できる。 Δz は小さすぎると計算が発散してしまい、大きすぎると Step-2 と 3 の間にヒステリシスが生じてしまう。最適な Δz はヤング率や厚みの条件で変わってしまうので、 $3a/10$ 程度の小さい範囲でうまく計算できた小さい値を採用した。

要素特性

C.2 で設定した変形面の要素特性の設定で、シェル厚 t と材料特性 (E, ν) のパラメータを、それぞれ $t = 0.4e - 3, 0.5e - 3, (E, \nu) = (2.1e9, 0.0), (1.9e9, 0.3), (1.5e9, 0.5)$ と変化させ 6 パターン計算した。

表 C.2 境界条件の設定。デフォルトでは設定した境界条件は次のステップでも継承されるので、無効にするときはモデルツリーのステップからその境界条件を無効にする必要がある。また変位の数値はステップ間の相対変位ではなく、初期状態からの絶対変位である。

| | Base2 全体 | Hub 全体 | Tab3 |
|--------|--------------------------------------|------------|----------------------|
| Step-1 | ZSYMM(作成) | ZASYMM(作成) | U3 = Δz (作成) |
| Step-2 | ZSYMM(継承), UR3 = 2.0944(作成) | ZASYMM(継承) | U3 = Δz (無効) |
| Step-3 | ZSYMM(継承), UR3 = 2.0944(無効), 0.0(作成) | ZASYMM(継承) | |

Arm の幅を変更した場合 (パート設定)

RES で主に変形している面は Arm である。Arm の幅を変更した場合の駆動トルクを計算するために、 $b = 9, 15, 25$ となる Arm のパートを再構築し、これに伴って Base のパートも定義し直した形状モデルを設定した。

駆動トルクの解析の設定 ($-10^\circ < \theta < 130^\circ$)

反トルクが大きすぎるため実験では測定できない、 $\theta < 0^\circ$, $120^\circ < \theta$ の角度領域を数値解析で計算した。初期状態は $\theta = 0^\circ$ として、アセンブリではすべてのインスタンスが平面に並ぶように配置した。

ステップと境界条件と要素特性

解析ステップは 5 つ設定した。状況は C.2 とほぼ同じなので、各ステップで設定する境界条件の表のみ示す。厚みとヤング率を変化させて計算した。

起立状態 ($\theta = 120^\circ$) における耐荷重解析の設定

起立状態 ($\theta = 120^\circ$) が初期配置になるようにアセンブリでインスタンスの位置を調整し、Hub に $-z$ 方向の変位を与え、反力を計算した。Hub にのみ変位を与えると、RES 全体が並行移動してしまうので、Base を固定する境界条件を与えるが、固定の設定方法によって、計算結果に大きな差が生じた。また要素特性は C.2 と同様に、厚みとヤング率を変化させて計算した。境界条件として与える変位の方向は変化しないので、解析ステップは 1 つだけ設定した。

表 C.3 駆動角度範囲外まで動かす場合の境界条件の設定。デフォルトでは設定した境界条件は次のステップでも継承されるので、無効にするときはモデルツリーのステップからその境界条件を無効にする必要がある。

| | Base2 全体 | Hub 全体 | Tab3 |
|--------|---|------------|----------------------|
| Step-1 | ZSYMM(作成) | ZASYMM(作成) | $U3 = \Delta z$ (作成) |
| Step-2 | ZSYMM(継承), $UR3 = 2.0944$ (作成) | ZASYMM(継承) | $U3 = \Delta z$ (無効) |
| Step-3 | ZSYMM(継承), $UR3 = 2.0944$ (無効), 2.2689 (作成) | ZASYMM(継承) | |
| Step-4 | ZSYMM(継承), $UR3 = 2.2689$ (無効), 0.0 (作成) | ZASYMM(継承) | |
| Step-5 | ZSYMM(継承), $UR3 = 0.0$ (無効), -0.1745 (作成) | ZASYMM(継承) | |

Base を完全固定した場合

Baseにタイプ：「対称/反対称/完全固定」のENCASTRE($U1=U2=U3=UR1=UR2=UR3=0$)の条件を設定し、Hub を初期高さの $1/100$ だけ動かす $U3 = -0.25e - 3$ の条件を設定した。その結果、反力 $RF3$ は押し込み長 $U3$ に対して大きな勾配で増大、つまり非常に硬い応答を示した。

Base の床接触を再現した場合

実験においては Base は床に押し付けられており「Base が $z < 0$ の領域に侵入しない」という条件がより実験を再現していると考えられ、たしかに実験動画を確認すると Base は完全に固定できているわけではなく若干 $+z$ 方向に浮く様子が見られた。

ABAQUS/CAE では「相互作用特性」と「相互作用」でこの条件を設定した。まず床面として面接触する円盤の部分を新たに作成して Base3 とした。Base3 は変形体のシェルだが、要素特性は Base2 同様に十分硬く設定した。アセンブリ：インスタンスで Base2 を配置したが、このとき Base と一致するように配置すると最初から全面接触の計算となり解析が不安定になるので、面の厚み程度 Base から離して Base2 を配置した。

アセンブリ：サーフェスで Base と Base3 の接触表面を定義しておく。次にモデルツリーの相互作用特性をダブルクリックして、タイプ：接触を選択する。図 C.9(b) のように、接触特性オプションに機械的：接触接線方向の挙動を選択し、摩擦係数を適当に 0.05 に設定した。交差しない条件を設定しただけなので、摩擦係数は適当な値で問題ないことを確認した。そして、モデルツリーの相互作用をダブルクリックして、ステップ：Initial、タイプ：一般接触を選択した。含めるサーフェス対を「すべて」に設定すれば自

己交差も排除できたが、計算時間が極めて膨大になるため「選択されたサーフェス対」として、Base と Base3 の表面を指定した (図 C.9(a))。

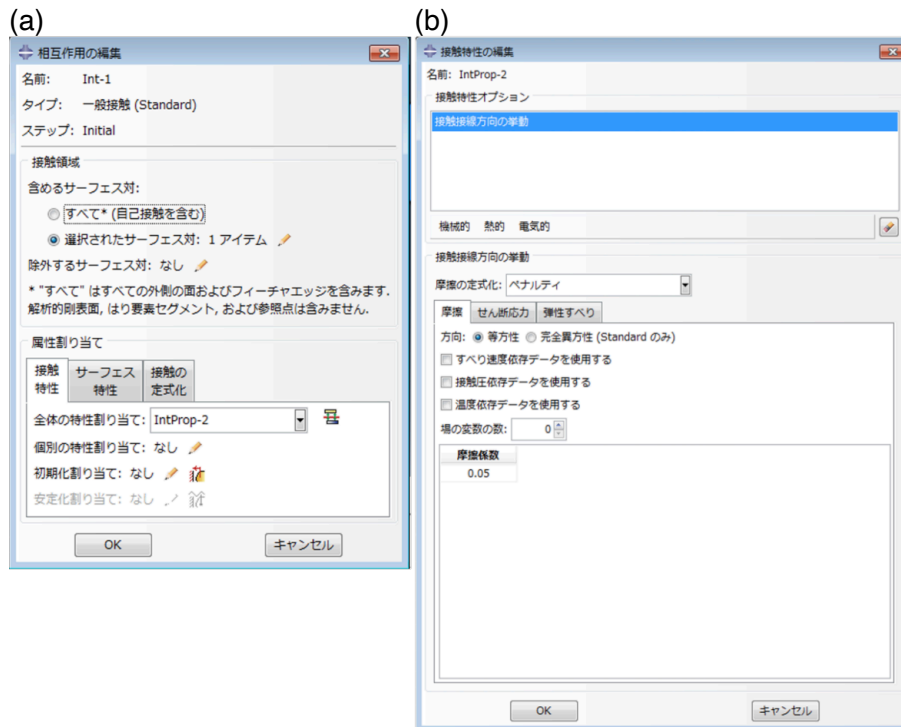


図 C.9 (a) 相互作用の設定と (b) 相互作用特性の設定。

境界条件は、Hub の中心に最も近い節点に初期高さの $1/5$ の変位 $U3 = 5e - 3$ 、Base の外縁に PINNED、Base3 全体に ENCASTER の条件を設定した。これによって実験に近い反力の出力結果が得られたので、RES の変形において Base のある程度の遊びは重要になるとと思われる。

数値解析の計算投入と計算結果の表示

計算する状況を設定できたら、モデルツリー：解析：ジョブで、計算させるモデルを選択し、デフォルトの設定のままジョブを設定した。設定したジョブを右クリックして、ジョブの投入を選択すると解析が始まる。解析中に”モニタ”を選択すると現在の解析状況が表示される。計算エラーが出た場合も、どのステップで計算が収束しなかったかモニタでログを確認できる。

出力データベースを開くか、ジョブ名から「結果」を選択すると、結果の表示に切り替わる。

値の出力

基本的にはメニューバーのツール：XY データ：マネージャ：作成：OBD フィールド出力を使った。

回転角度 θ に対する Hub の高さ z を出力する場合

変数タブで位置：節点とし、U3 にチェックを付け、要素/節点タブでビューポートからピックとし、Hub 上の 1 点を選択し、保存した。同様に、変数タブで UR3 にチェックを付け、要素/節点タブで Base2 上の 1 点を選択し、保存した。そしてメニューバーからレポート：XY... を選択し、XY データタブで先に保存した U3 と UR3 を選択して、設定タブで適当にファイル名を設定し、OK を押した。これで、時間 X, 高さ U3, 回転角度 UR3 が格納されたデータファイルが出力できた。

回転角度 θ に対する反トルク M を出力する場合

変数タブで位置：節点とし、RM3 にチェックを付け、要素/節点タブで節点集合、Hub と Base2 の集合を選択し、保存した。同様に、変数タブで UR3 にチェックを付け、要素/節点タブで Base2 上の 1 点を選択し、保存した。次に再び XY データ作成から、XY データの演算を選択し、演算子に $\text{sum}((A,A,...))$ 、XY データに保存した RM3 をすべて選択して算術式に追加し、別名保存する。そしてメニューバーからレポート：XY... を選択し、XY データタブで先に保存した $\text{sum}(\text{RM3})$ と UR3 を選択して、設定タブで適当にファイル名を設定し、OK を押した。これで、時間 X, 全体での駆動反トルク $\text{sum}(\text{RM3})$ 、回転角度 UR3 が格納されたデータファイルが出力できた。

ビューポートの出力

解析結果の変形画像をベクター画像として EPS 出力することが ABAQUS/CAE でサポートされている。簡易的にはラスター出力の PNG も用意されているので、細部に拘らないならラスター適当に出力しても良い。EPS の出力設定のパラメータは多岐に渡るが、様々な出力を試みた結果、後にイラストレーター (Adobe) などのベクター描画ソフトで編集することを考えると、以下の設定で出力することが望ましい。

EPS 出力に関して設定できるオプションは、ツールボックスエリアのコンタープロットオプション (図 C.10(a)) と、メニューバー：ファイル：プリント (図 C.10(b)) で出力

先をファイルに設定して形式を EPS にしたときの EPS オプション (図 C.10(c)) である。コンターオプションのコンター区間は連続に設定すると滑らかな図が出力できるが、EPS オプションで出力の解像度を上げなければコンターに隙間ができてしまう。コンターの方法は「テクスチャ」の方が表示性能が良いと説明されているが、要素境界線の上にコンターカラーが表示されてしまうなど、EPS の描画ソフト (またはグラフィック関連のハードウェア) によっては細かい表示が汚くなるので、「モザイク」を選択した方が良い。次に EPS オプションで解像度は高い値ほど細部まで表現できるが、安易に 1200dpi を選択すると (描画の複雑さによるが)、ソフトウェアでの描画表示にかなり時間がかかる。300 から 600dpi を選択すると良い。シェーディング画質はビューポートのツールバーでレンダーモデルにシェーディングを選択していた場合に有効で、質感が変わる。見易さに拘るなら、メニューバー：ビュー：光源オプションと併せて調整しても良い。

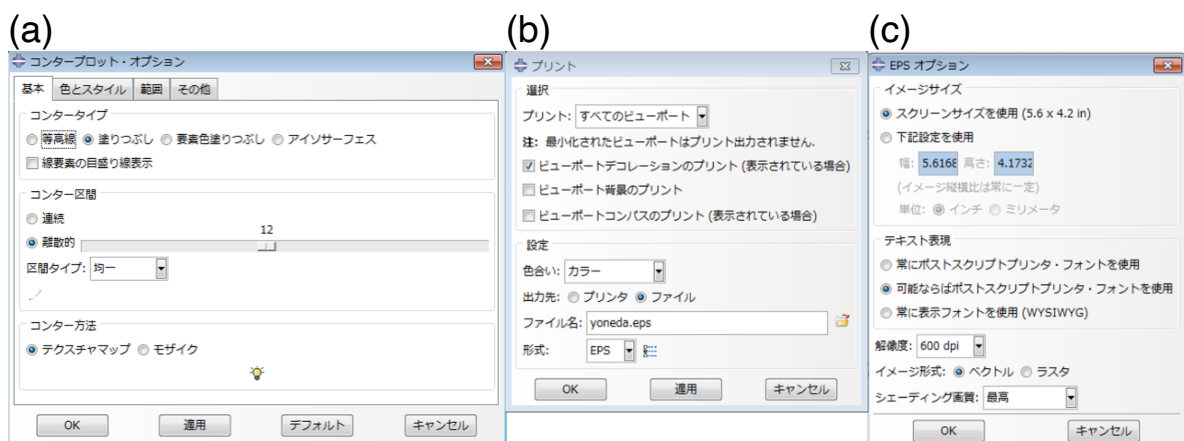


図 C.10 (a) コンターオプションの設定。(b) プリントの設定。(c)EPS オプションの設定。

付録 D

シリコーンによる形成

本論文で扱った紙ばねや RES なども含め、折りのある構造は折り目の条件によって力学特性が大きく変化してしまうことがある。紙ばねのセロハンテープや RES のハーフカットは折り目の力学応答を極力排除するための策であるが、折り目の弾性を許容し、かつ角度が 180° で自然状態ではないような折り目を作成するためには、三次元のファブリケーションが必要である。そのために硬化シリコーンに注目し、いくつかの試験を実施したので記す。

D.1 硬化シリコン樹脂のヤング率測定

ヤング率測定を 2 種混合硬化で付加重合タイプのシリコーン (HTV-4000, Engraving-Japan) で実施した。重力の影響を知るために、引張り方向は、鉛直方向と水平方向の 2 種類を試し、それぞれ差異がないかも考察した。

まず、三脚につけた鉛直まっすぐな固定棒を用意した。そこに内径約 4 mm の樹脂製チューブを、なるべくまっすぐになるように固定棒にセロハンテープで貼り付けた。このチューブには、シリコンとの相性があるらしく、素材はわからないが和田研にある柔らかめのチューブでは、壁面がシリコンで融解しているのか、うまく固まらなかった。硬めのチューブをなるべくまっすぐにして設置した。

最小目盛り 1g の電子天秤で、質量比 1:1 を混合した。紙コップと割り箸 2 膳を用意した。こぼれるとベタベタになるので、天秤にペーパータオルを敷き、その上に紙コップを置き、天秤の表示をゼロにセットした。シリコン A の蓋を開け、分離してるかもしれないので容器内で一度割り箸で攪拌した。そして A を M (g) 紙コップに入れた。垂れたシリコンを拭き取り、シリコン A の容器は蓋を閉めた。シリコン B の蓋を開け、攪拌し、

なるべく素早く M (g) 紙コップに入れた。それからすぐに約 180 秒紙コップの A+B をよく混ぜた。壁面付近はシリコン A が止まっているので、こそげ取るようによく混ぜた。混ぜつつ、シリコン B の容器の蓋を閉めた。すぐ固まることを懸念したが、10 分ほどは流動性に変化がないようだった。

180 秒混ぜてから、針なし注射器で適量吸い出し、設置したチューブの上方から流し込んだ。このとき気泡がなるべく入らないように、注射器を叩いて、気泡を逃しつつ、5 分ほどかけてゆっくりと流し込んだ。シリコンでチューブ全体が埋まったら、チューブ下方の終端付近を締め付け潰して、シリコンが流れ出してしまうようにした。

HTV-4000 シリコンの硬化にかかる推奨時間は 8 時間だったが、20 時間後にチューブからシリコン紐（円柱）を取り出した。チューブ先端を切り、紐が途中でちぎれないように注意して、取り出した。締め付け潰した部分でチューブとシリコンが強く接着されていたので、チューブの端から竹串を突っ込んで、シリコンをチューブ内壁から引き剥がした。硬化した HTV-4000 シリコンは思った以上に破断しにくく結構グイグイ引っ張ったが、ちぎれず摘出できた。

摘出したシリコン紐の両端付近は曲がっていたので切り落とし、200 mm の紐が完成した。直径 ϕ (mm) はノギス（最小副尺目盛り 0.02 mm）で測定した。ここで、ノギスを接触させると変形して直径が変わってしまうことが問題となった。重力で落下するかしないかギリギリのところ、シリコン紐をノギスで挟み、このとき変形が最小限に抑えられているものとして直径を読み取った。場所により直径が異なるかもしれないので、両端付近と中央付近の計 3 カ所で、それぞれ 3 回ずつ測定を行った。その結果を表 D.1 に示す。

表 D.1 形成したシリコン紐（円柱）の直径測定結果。紐の太さの均一性も確認するために、紐の両端付近と中央付近の、計 3 箇所 (A, B, C) で直径 ϕ_A , ϕ_B , ϕ_C を 3 回ずつ測定した。

| | ϕ_A | ϕ_B | ϕ_C |
|-----|----------|----------|----------|
| | 4.18 | 4.08 | 4.08 |
| | 4.08 | 4.02 | 4.20 |
| | 4.00 | 4.10 | 4.00 |
| ave | 4.087 | 4.067 | 4.093 |

それぞれの箇所 (A, B, C) で測定 3 回の平均をみると、直径の場所依存のばらつきは相対誤差で 0.2 % 程度と小さかったので、形成したシリコン紐の直径は均一だったと判断し

た。9つ全ての測定結果を平均して、平均二乗誤差も考えて、紐の直径は

$$\phi = 4.08 \pm 0.02 \text{ mm} \quad (\text{D.1})$$

と計算された。以降、シリコン紐の直径は $\phi = 4.08 \text{ mm}$ として計算している。

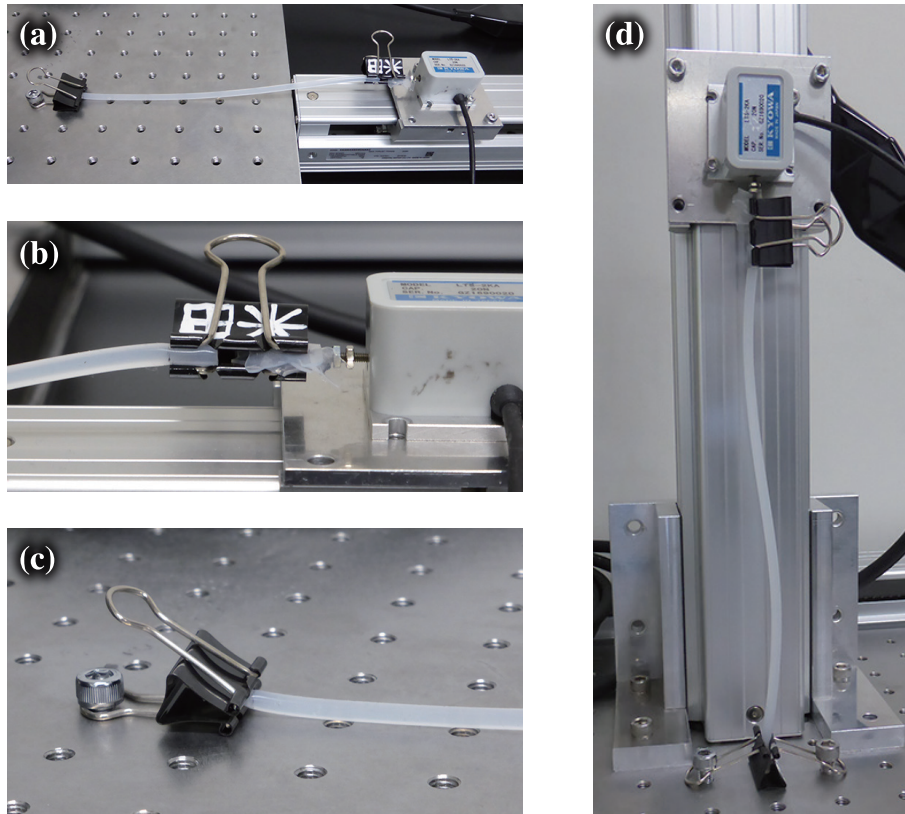


図 D.1 引張り測定の写真。(a) 水平引張りの全体図。伸張はじめの状態、紐は地面に着くくらいにたるんでいる。若干ロードセル側の端が高い位置にある。(b) 紐とロードセルの接続。クリップで挟み込んでいる。ロードセルとクリップが滑らないように、間にシリコンシートを挟んでいる。シリコンシートを挟んでも、紐を引っ張った時 μm 単位で弾性的に滑ることを確認したが、この影響は十分小さいものとした。(c) 光学定盤とクリップの固定は、クリップをネジで締め付けた。(d) 鉛直引張りの全体図。伸張はじめの状態、紐は座屈している。

実験のセットアップを図 D.1 に示す。作成したシリコン紐 (円柱) に間隔 $190 \times 10^{-3} \text{ m}$ で油性マジックでマーカを入れた。ただし、油性インクとシリコンとの相性が悪く、インクのノリが悪かった。指でこするとマーカが消えるので注意した。シリコン紐のマーカの箇所を、クリップで挟み込んだ。一端のクリップを床 (光学定盤) にねじ止めし、一旦をロードセル (LTS-2KA, Kyowa) に接続した。ロードセルはステッピングモーター駆

動の電動スライダ (EASM4XE040ARAC, orientalmotor) に接続し、スライダでシリコン紐を $50 \times 10^{-3} \text{ m}$ 引っ張った。ロードセルは時刻 T (s) と荷重 F (N) を測定する。電動スライダの駆動速度は $v = 0.1 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ だった。引っ張りの変位は $\Delta L = Tv$ (m) で表せる。シリコン紐が初期状態でたるんだ状態から引っ張る過程と、引っ張った状態から初期状態へ戻る過程の 2 パターンを、それぞれ 2 回ずつ測定した。

また、ポアソン比の算出のために、伸張変位が $\Delta L = 0.010, 0.025, 0.050 \text{ m}$ のときそれぞれ、ノギスを用いてノギスの直径を 3 回ずつ測定して平均し、 $\phi + \Delta\phi(\Delta L)$ を求める。ここから $\Delta\phi/\phi$ vs $\Delta L/L$ のグラフを作成し、線形関数 $f(\Delta L/L) = \nu x + b$ で最小二乗法近似すると、 $\nu = 0.33$ となった。

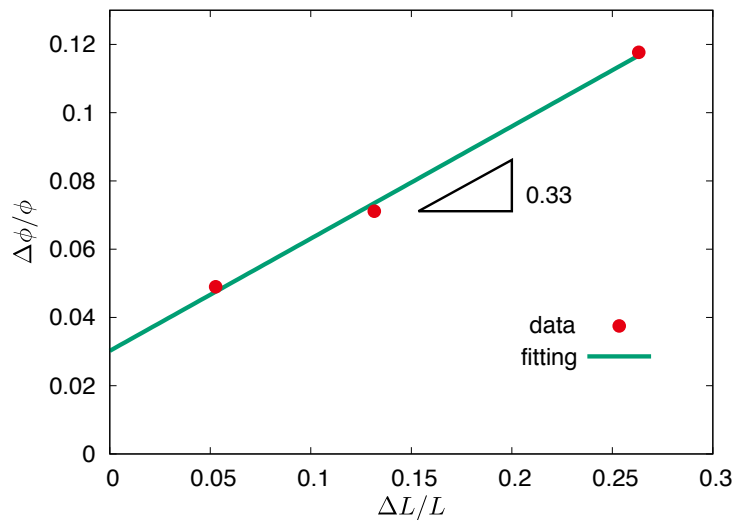


図 D.2 引っ張り方向のひずみに対する垂直方向のひずみの測定結果。線形フィッティングすると、ポアソン比は 0.33 だった。原点を通らないのは、伸張初期状態を自然長に合わせていないから。

鉛直引っ張りでは、スライダを光学定盤上に立てて設置した。初期状態でシリコン紐は座屈していた。水平引っ張りにおいても、初期状態で、シリコン紐は重力懸垂により床に接触していた。両測定ともある程度伸張させて、グラフの線形領域からヤング率を算出する必要があった。gnuplot で応力 $\sigma = F/S$ と歪み $\Delta L/L$ を計算して、ヤング率 E を求めた。

ここで、poisson 効果により伸長 ΔL の増加とともに断面積 S は減少する。引っ張り方向と直行する方向の歪みを ε' とすると、 $\nu = -\varepsilon'/\varepsilon$ なので、 $\Delta\phi = -\nu\phi(\Delta L/L)$ となる。これより、断面積は伸長 ΔL の関数で表せるので、

$$S(\Delta L) = \pi [\phi/2(1 - \nu\Delta L/L)] \quad (\text{D.2})$$

として計算した。その結果、

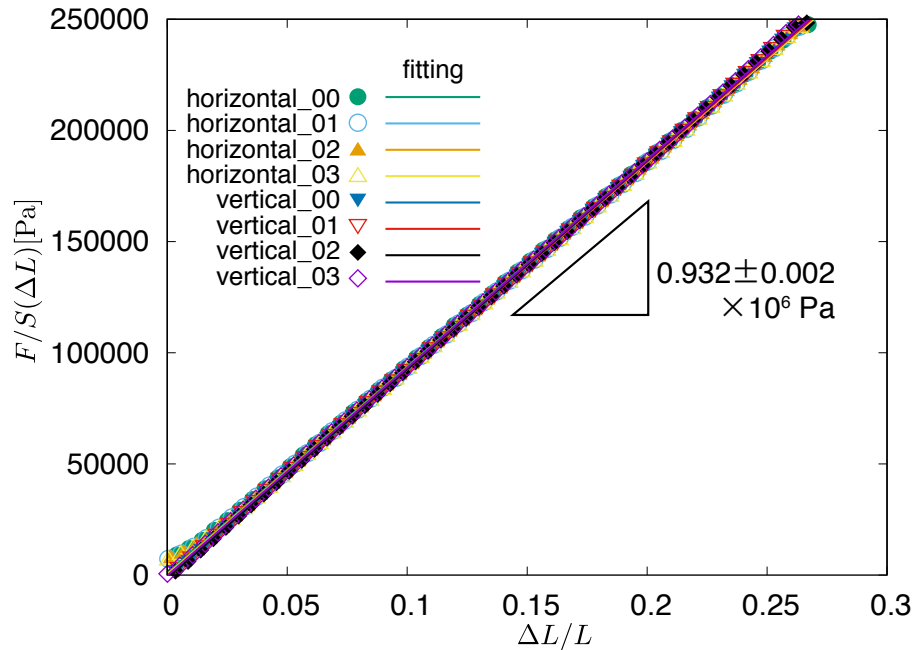


図 D.3 ひずみに対する応力の測定結果。伸張過程と戻す過程、鉛直方向と水平方向の引張りそれぞれのデータを重ねて、平均と平均二乗誤差をとると、傾き：ヤング率は $E = 0.932 \pm 0.002 \text{ MPa}$ となった。

$$E = 0.932 \pm 0.002 \text{ MPa} \quad (\text{D.3})$$

であった。

ちなみに、ここでの誤差は、引っ張って戻した4回のばらつきを平均二乗誤差で表している。断面直径 $\phi = 4.08 \times 10^{-3} \text{ m}$ で計算しており、 ϕ の誤差伝播は考えてない。平均二乗誤差 err は、各測定値 a_i と平均値 $\langle a \rangle$ との差を δ 、測定回数を N として、

$$\text{err} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_i^N (\delta_i^2)} \quad (\text{D.4})$$

を計算している。フックの線形則は本当に正しかった。

D.2 硬化に関する性質

歯科印象剤であるエリートダブル8(ピンク)とエリートダブル22(緑)(Zhermack Dental)について、硬化の性質を調べた。エリートダブルは、硬化時間が早いシリコーンであ

る。製品説明書より抜粋して以下に記す。

- 主成分：ポリビニルシロキサン
- 付加重合タイプのシリコーン樹脂
- 混合質量比 1:1
- 操作時間 10 分
- 硬化時間 20 分 (高温でより短時間で硬化、ラテックス系より遅い)
- 歯科の従事者以外は使用しないこと

硬化阻害について

付加重合タイプのシリコーン樹脂は、硫黄、リン、窒素化合物、水、有機金属塩、縮合型シリコーン RTV ゴムなどの物質で硬化阻害が生じることがある [72]。以下の例に挙げる材質は、付加シリコーンの型としては不適切であるので注意したい。

- 有機ゴム
- 軟質塩化ビニル樹脂
- エポキシ樹脂 (アミン系)
- ウレタン樹脂 (イソシアネート類)
- ゴム粘土、油粘土
- ビニルテープ粘着剤、接着剤
- ポリエステル系塗料、ワックス、松ヤニ

主剤と硬化剤の混合操作

ボトルに入ったエリートダブルの主剤と硬化剤は、容器内で透明なオイルのような成分が分離していることがあるので、作業前に軽く予備攪拌しておく。紙コップに適量のエリートダブル主剤を、こぼさないように注意しつつボトルから取り出し、電子てんびんで紙コップの質量を除いた主剤の質量を測定した。そして、混合比 1 : 1 になるように硬化剤を同じ紙コップに取り、すぐに 5 分以内でなるべく均一かつ気泡が入らないように割り箸でよく混ぜ、注射器を用いて硬化前の混合エリートダブルを試験用チューブに流した。ここで特筆すべき注意点は 3 つある。

型との相性試験

ヤング率測定のための引っ張り試験に使用するため、型となる各種樹脂のチューブにエリートダブルを流入させ、硬化の相性を検証した。用いた樹脂型チューブの材質は次の4つである(表 D.2)。ただし、材質に関しては製品情報の記述をそのまま載せる。硬化の可否も記載する。エチレン(軟質)、ウレタン(エーテル)が相性が良い結果となった。

表 D.2 エリートダブル 22(緑)の硬化相性

| | |
|-------------|---|
| 軟質ポリエチレン | ◎ |
| シリコンゴム | × |
| エーテル系ポリウレタン | ◎ |
| 軟質ポリ塩化ビニル | △ |

チューブの曲げについて

エチレン、ウレタンは硬い素材だったので、細密な変形のためにはチューブ厚が小さいものを用意する必要がある。ただ、壁厚が小さいと、チューブを曲げたときに断面が潰れやすいので注意したい。実験に用意したチューブの寸法は以下の通り。

- エチレン (外径 × 内径)= $1.0 \times 0.5(\phi(\text{mm}))$)
- ウレタン (外径 × 内径)= $4.0 \times 2.5(\phi(\text{mm}))$)

チューブの色について

製品によって加工が異なることが原因かもしれないが、エチレンは乳白色、ウレタンは透明だったので、シリコンの充填具合が確認しやすい利点があった。

硬化後の密度

余ったエリートダブルで硬化後の密度 ρ を測定した。チューブ型へのシリコン注入に使用した注射器内に残ったエリートダブルをそのまま硬化させ、半径 $r = 1.1 \text{ cm}$ 、高さ $h = 1.7 \text{ cm}$ の円柱を形成した。この円柱エリートダブルの質量を電子てんびんで測定し

たところ $m = 7.7 \text{ g}$ であった。よって、硬化後のエリートダブルの密度は次のように計算できた。

$$\rho = \frac{m}{\pi r^2 h} = 1.2 \text{ g/cm}^3 \quad (\text{D.5})$$

温度などの条件は考えていないため、概算値として使用する。ちなみに食塩水の飽和密度に近い値であったので、水槽内を飽和食塩水にすれば、密度差ゼロで重力の影響を排除したシリコーンを駆動させられるかもしれない。

付録 E

紙ばね 型紙

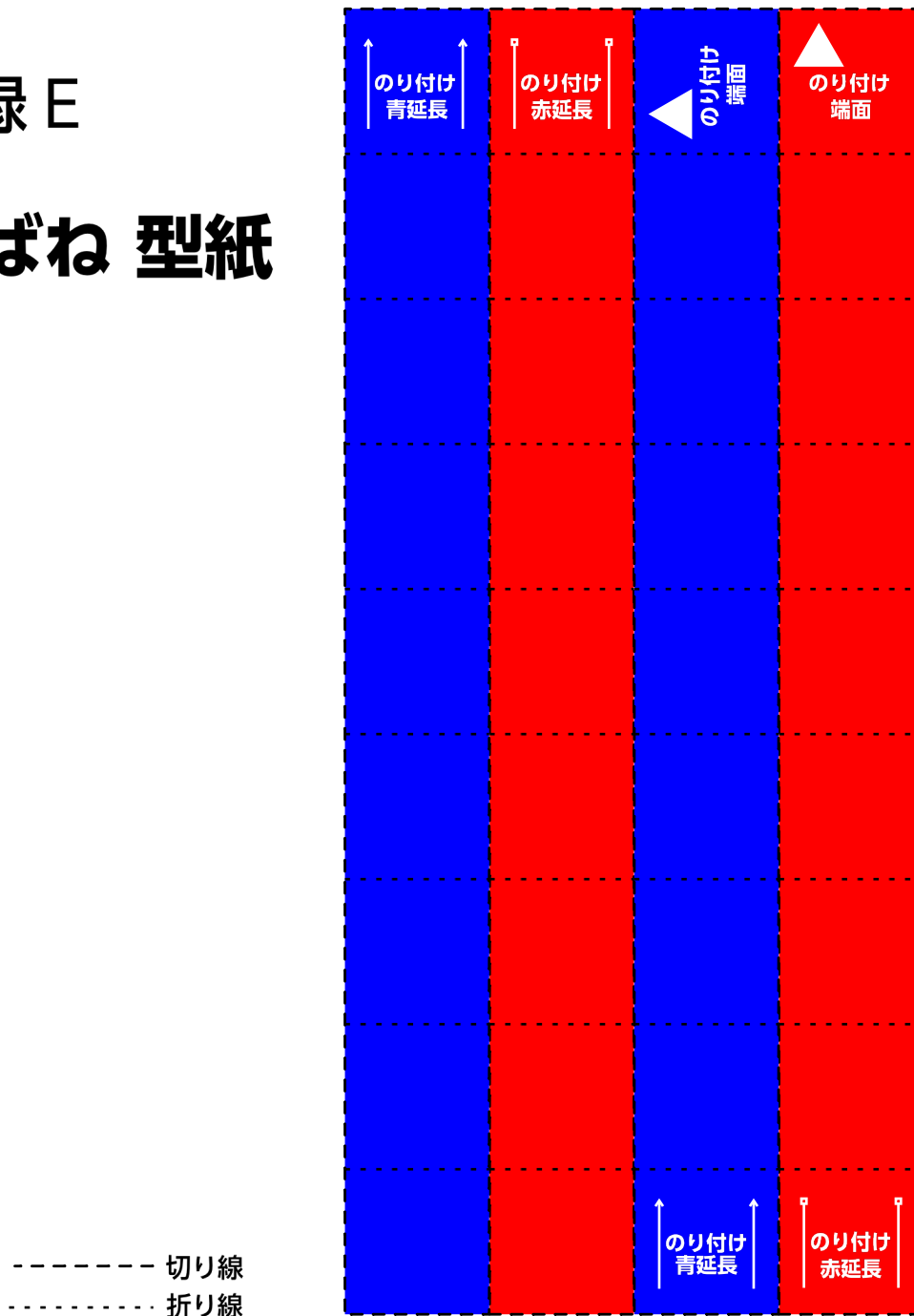


図 E.1 第 2 章で説明する正方形紙ばねは簡単に作成することができる。ぜひこのページを切り線に従い、はさみで切り出し、のりで貼り合わせ、実際に紙ばねの模型を作成して、弾性とねじれの挙動を体感してほしい。赤・青それぞれの「延長」の部分同士をつなげて長帯にして、2本の帯を端ので直交するように△を重ねて貼り合わせ、折り線で交互に折り込む。

謝辞

研究の遂行と理論解析や論文の作成の指導、研究者としての心構え、さらに家庭のことについての有益な助言までしていただいた、指導教員の和田浩史教授に深く感謝します。九州大学芸術工学研究院 齊藤一哉講師、立命館大学理工学部ロボティクス学科 平井慎一教授、同学部物理科学科 清水寧教授には、本論文に関して的確で重要な多くの助言をいただきました。本当にありがとうございました。うすい弾性構造の有限要素法解析において助力いただいた松本大地博士、並びに本論文第3章で取り上げた RES の基礎デザインを提供していただくとともに数多くの有用な助言をいただいた愛知工業大学工学部建築学科 宮本好信教授に感謝の意を表します。

また同じ研究室に所属する吉田圭介氏、片岡拓郎氏、豊永大希氏には、日頃から多くの議論や理論計算の助言をしていただきました。慶應義塾大学理工学部機械工学科 佐野友彦講師、東京都立大学理学部物理学科 谷茉莉助教には、研究に関する議論から研究に取り組む姿勢や実験工作の楽しさを、研究室の卒業生である、中村圭吾氏、高木俊明氏、谷口凌氏、末廣和氏、石井博文氏、西村莉奈氏には、実験の膨大なデータ取得と試行錯誤、理論的なストーリー構成、(そして適切な適当さ) など様々なことを隣りで体験させてもらい、多くのことを学びました。これら多くの方々に感謝します。本研究の一部は科研費 19J22381 の助成を受けたものであります。誠にありがとうございました。

最後に、研究のテーマ探しの散歩や夜通し成果をまとめる時間、研究生活に関わるすべてで支えになってくれた、妻 愛未と息子 三葵に、心からの謝意を記します。

参考文献

- [1] Koryo Miura. Method of packaging and deployment of large membranes in space. The Institute of Space and Astronautical Science report, No. 618, pp. 1–9, 1985.
- [2] Tomohiro Tachi. Origamizing polyhedral surfaces. IEEE transactions on visualization and computer graphics, Vol. 16, No. 2, pp. 298–311, 2009.
- [3] Phanisri P Pratapa, Ke Liu, and Glaucio H Paulino. Geometric mechanics of origami patterns exhibiting poisson’ s ratio switch by breaking mountain and valley assignment. Physical review letters, Vol. 122, No. 15, p. 155501, 2019.
- [4] Kazuya Saito, Akira Tsukahara, and Yoji Okabe. New deployable structures based on an elastic origami model. Journal of mechanical design, Vol. 137, No. 2, p. 021402, 2015.
- [5] Yihui Zhang, Fan Zhang, Zheng Yan, Qiang Ma, Xiuling Li, Yonggang Huang, and John A Rogers. Printing, folding and assembly methods for forming 3d mesostructures in advanced materials. Nature Reviews Materials, Vol. 2, No. 4, pp. 1–17, 2017.
- [6] Sheng Xu, Zheng Yan, Kyung-In Jang, Wen Huang, Haoran Fu, Jeonghyun Kim, Zijun Wei, Matthew Flavin, Joselle McCracken, Renhan Wang, et al. Assembly of micro/nanomaterials into complex, three-dimensional architectures by compressive buckling. Science, Vol. 347, No. 6218, pp. 154–159, 2015.
- [7] ET Filipov, GH Paulino, and T Tachi. Origami tubes with reconfigurable polygonal cross-sections. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 472, No. 2185, p. 20150607, 2016.
- [8] 前川淳. 本格折り紙: 入門から上級まで. 日貿出版社, 2007.
- [9] Paul Jackson. Complete Pleats. Laurence King Publishing, 2015.
- [10] Christoph H Belke and Jamie Paik. Mori: a modular origami robot. IEEE/ASME

- Transactions on Mechatronics, Vol. 22, No. 5, pp. 2153–2164, 2017.
- [11] Hani Buri and Yves Weinand. Origami-folded plate structures, architecture. Technical report, 2008.
 - [12] Matthew J Harrington, Khashayar Razghandi, Friedrich Ditsch, Lorenzo Guiducci, Markus Rueggeberg, John WC Dunlop, Peter Fratzl, Christoph Neinhuis, and Ingo Burgert. Origami-like unfolding of hydro-actuated ice plant seed capsules. Nature communications, Vol. 2, No. 1, pp. 1–7, 2011.
 - [13] Tomohiro Tachi. Designing freeform origami tessellations by generalizing resch’s patterns. Journal of mechanical design, Vol. 135, No. 11, 2013.
 - [14] Arthur Lebé. From folds to structures, a review. International journal of space structures, Vol. 30, No. 2, pp. 55–74, 2015.
 - [15] Thomas Hull. Project origami: activities for exploring mathematics. CRC Press, 2012.
 - [16] Katia Bertoldi, Vincenzo Vitelli, Johan Christensen, and Martin Van Hecke. Flexible mechanical metamaterials. Nature Reviews Materials, Vol. 2, No. 11, pp. 1–11, 2017.
 - [17] Samuel Felton, Michael Tolley, Erik Demaine, Daniela Rus, and Robert Wood. A method for building self-folding machines. Science, Vol. 345, No. 6197, pp. 644–646, 2014.
 - [18] Evgueni T Filipov, Tomohiro Tachi, and Glaucio H Paulino. Origami tubes assembled into stiff, yet reconfigurable structures and metamaterials. Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 112, No. 40, pp. 12321–12326, 2015.
 - [19] Hiromi Yasuda, Balakumaran Gopalarethinam, Takahiro Kunimine, Tomohiro Tachi, and Jinkyu Yang. Origami-based cellular structures with in situ transition between collapsible and load-bearing configurations. Advanced Engineering Materials, Vol. 21, No. 12, p. 1900562, 2019.
 - [20] Kaori Kuribayashi, Koichi Tsuchiya, Zhong You, Dacian Tomus, Minoru Umemoto, Takahiro Ito, and Masahiro Sasaki. Self-deployable origami stent grafts as a biomedical application of ni-rich tini shape memory alloy foil. Materials Science and Engineering: A, Vol. 419, No. 1-2, pp. 131–137, 2006.
 - [21] Koryo Miura and Tomohiro Tachi. Synthesis of rigid-foldable cylindrical polyhedra. Symmetry: Art and Science, pp. 204–213, 2010.
 - [22] Origami Simulator. <https://origamisimulator.org>.

- [23] Midori Isobe and Ko Okumura. Initial rigid response and softening transition of highly stretchable kirigami sheet materials. Scientific reports, Vol. 6, No. 1, pp. 1–6, 2016.
- [24] ダーシー・トムソン, 柳田友道, 遠藤勲. 生物のかたち, 第 121 巻. 東京大学出版会, 1973.
- [25] 望月修. 物理の眼で見る生き物の世界—バイオミメティクス皆伝—. 2016.
- [26] Bernhard Misof, Shanlin Liu, Karen Meusemann, Ralph S Peters, Alexander Donath, Christoph Mayer, Paul B Frandsen, Jessica Ware, Tomáš Flouri, Rolf G Beutel, et al. Phylogenomics resolves the timing and pattern of insect evolution. Science, Vol. 346, No. 6210, pp. 763–767, 2014.
- [27] Jane B Reece, et al. Campbell biology. No. s 1309.
- [28] Wataru Kojima, Shinji Sugiura, Hiroshi Makihara, Yukio Ishikawa, and Takuma Takanashi. Rhinoceros beetles suffer male-biased predation by mammalian and avian predators. Zoological science, Vol. 31, No. 3, pp. 109–115, 2014.
- [29] Kazuya Saito, Shuhei Yamamoto, Munetoshi Maruyama, and Yoji Okabe. Asymmetric hindwing foldings in rove beetles. Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 111, No. 46, pp. 16349–16352, 2014.
- [30] Fabian Haas and Rolf G Beutel. Wing folding and the functional morphology of the wing base in coleoptera. Zoology, Vol. 104, No. 2, pp. 123–141, 2001.
- [31] 須藤誠一, 露木浩二. 飛行昆虫のバイオメカニクスと流れ. 日本流体力学会誌 「ながれ」, Vol. 21, No. 2, pp. 142–152, 2002.
- [32] エマ サラ テナント ビル フィツモーリスフォーガス チャドウィック, ジュディーアール. ミツバチの教科書. エクスナレッジ, 2017.
- [33] Takahiro Ohde, Toshinobu Yaginuma, and Teruyuki Niimi. Insect morphological diversification through the modification of wing serial homologs. Science, Vol. 340, No. 6131, pp. 495–498, 2013.
- [34] Philip Ball. Shapes: nature’s patterns: a tapestry in three parts. OUP Oxford, 2009.
- [35] Gregory P Sutton, Dominic Clarke, Erica L Morley, and Daniel Robert. Mechanosensory hairs in bumblebees (*bombus terrestris*) detect weak electric fields. Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 113, No. 26, pp. 7261–7265, 2016.
- [36] Hidetoshi Kobayashi, Masashi Daimaruya, and Hirofumi Fujita. Unfolding of

- morning glory flower as a deployable structure. In IUTAM Symposium on Dynamics of Advanced Materials and Smart Structures, pp. 207–216. Springer, 2003.
- [37] Shanpeng Li, Yun Zhang, and Jianlin Liu. Seed ejection mechanism in an oxalis species. Scientific reports, Vol. 10, No. 1, pp. 1–9, 2020.
- [38] Zhiyan Y Wei, Zengcai V Guo, Levi Dudte, Haiyi Y Liang, and Lakshminarayanan Mahadevan. Geometric mechanics of periodic pleated origami. Physical review letters, Vol. 110, No. 21, p. 215501, 2013.
- [39] Frederic Lechenault, Benjamin Thiria, and Mokhtar Adda-Bedia. Mechanical response of a creased sheet. Physical review letters, Vol. 112, No. 24, p. 244301, 2014.
- [40] Jesse L Silverberg, Arthur A Evans, Lauren McLeod, Ryan C Hayward, Thomas Hull, Christian D Santangelo, and Itai Cohen. Using origami design principles to fold reprogrammable mechanical metamaterials. science, Vol. 345, No. 6197, pp. 647–650, 2014.
- [41] Jesse L Silverberg, Jun-Hee Na, Arthur A Evans, Bin Liu, Thomas C Hull, Christian D Santangelo, Robert J Lang, Ryan C Hayward, and Itai Cohen. Origami structures with a critical transition to bistability arising from hidden degrees of freedom. Nature materials, Vol. 14, No. 4, pp. 389–393, 2015.
- [42] F Lechenault and M Adda-Bedia. Generic bistability in creased conical surfaces. Physical review letters, Vol. 115, No. 23, p. 235501, 2015.
- [43] Jakob A Faber, Andres F Arrieta, and André R Studart. Bioinspired spring origami. Science, Vol. 359, No. 6382, pp. 1386–1391, 2018.
- [44] Chris R Calladine. Theory of shell structures. Cambridge university press, 1989.
- [45] Midori Isobe and Ko Okumura. Continuity and discontinuity of kirigami’s high-extensibility transition: A statistical-physics viewpoint. Physical Review Research, Vol. 1, No. 2, p. 022001, 2019.
- [46] Basile Audoly and Yves Pomeau. Elasticity and geometry: from hair curls to the non-linear response of shells. Oxford university press, 2010.
- [47] Erik D DEMAINE, Martin L DEMAINE, Duks KOSCHITZ, and Tomohiro TACHI. Curved crease folding a review on art, design and mathematics.
- [48] Mark Schenk and Simon D Guest. Geometry of miura-folded metamaterials. Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 110, No. 9, pp. 3276–

3281, 2013.

- [49] 村上伸一. 画像処理工学. 東京電機大学出版局, 2004.
- [50] Mark Meyer, Mathieu Desbrun, Peter Schröder, and Alan H Barr. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. In Visualization and mathematics III, pp. 35–57. Springer, 2003.
- [51] Randall D Kamien, Tom C Lubensky, Philip Nelson, and Corey S O’Hern. Direct determination of dna twist-stretch coupling. EPL (Europhysics Letters), Vol. 38, No. 3, p. 237, 1997.
- [52] Tobias Frenzel, Muamer Kadic, and Martin Wegener. Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist. Science, Vol. 358, No. 6366, pp. 1072–1074, 2017.
- [53] Ahmad Rafsanjani and Katia Bertoldi. Buckling-induced kirigami. Physical review letters, Vol. 118, No. 8, p. 084301, 2017.
- [54] Marcelo A Dias, Michael P McCarron, Daniel Rayneau-Kirkhope, Paul Z Hanakata, David K Campbell, Harold S Park, and Douglas P Holmes. Kirigami actuators. Soft matter, Vol. 13, No. 48, pp. 9087–9092, 2017.
- [55] Zhiguang Liu, Huifeng Du, Jiafang Li, Ling Lu, Zhi-Yuan Li, and Nicholas X Fang. Nano-kirigami with giant optical chirality. Science advances, Vol. 4, No. 7, p. eaat4436, 2018.
- [56] Magnus H Kaspersen, Sebastian Hines, Mark Moore, Majken K Rasmussen, and Marcelo A Dias. Lifting kirigami actuators up where they belong: Possibilities for sci. In Proceedings of the 2019 on Designing Interactive Systems Conference, pp. 935–947, 2019.
- [57] Taketoshi Nojima and Kazuya Saito. Development of newly designed ultra-light core structures. JSME International Journal Series A Solid Mechanics and Material Engineering, Vol. 49, No. 1, pp. 38–42, 2006.
- [58] Kazuya Saito, Fabio Agnese, and Fabrizio Scarpa. A cellular kirigami morphing wingbox concept. Journal of intelligent material systems and structures, Vol. 22, No. 9, pp. 935–944, 2011.
- [59] Toen Castle, Yigil Cho, Xingting Gong, Euiyeon Jung, Daniel M Sussman, Shu Yang, and Randall D Kamien. Making the cut: Lattice kirigami rules. Physical review letters, Vol. 113, No. 24, p. 245502, 2014.
- [60] Robin M Neville, Fabrizio Scarpa, and Alberto Pirrera. Shape morphing kirigami

- mechanical metamaterials. Scientific reports, Vol. 6, No. 1, pp. 1–12, 2016.
- [61] Ahmad Rafsanjani, Yuerou Zhang, Bangyuan Liu, Shmuel M Rubinstein, and Katia Bertoldi. Kirigami skins make a simple soft actuator crawl. Science Robotics, Vol. 3, No. 15, 2018.
- [62] Douglas P Holmes. Elasticity and stability of shape-shifting structures. Current opinion in colloid & interface science, Vol. 40, pp. 118–137, 2019.
- [63] Mingchao Liu, Lucie Domino, and Dominic Vella. Tapered elasticæ as a route for axisymmetric morphing structures. Soft Matter, Vol. 16, No. 33, pp. 7739–7750, 2020.
- [64] Zirui Zhai, Lingling Wu, and Hanqing Jiang. Mechanical metamaterials based on origami and kirigami. Applied Physics Reviews, Vol. 8, No. 4, p. 041319, 2021.
- [65] Yoshinobu Miyamoto. Rotational erection system (res): Origami extended with cuts. Origami6 II: Technology Art, Education, Miura K (ed.), AMS, pp. 537–544, 2015.
- [66] TC Lubensky, CL Kane, Xiaoming Mao, Anton Souslov, and Kai Sun. Phonons and elasticity in critically coordinated lattices. Reports on Progress in Physics, Vol. 78, No. 7, p. 073901, 2015.
- [67] Christopher R Calladine. Buckminster fuller’s “tensegrity” structures and clerk maxwell’s rules for the construction of stiff frames. International journal of solids and structures, Vol. 14, No. 2, pp. 161–172, 1978.
- [68] Tomohiro Tachi. Geometric considerations for the design of rigid origami structures. In Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium, Vol. 12, pp. 458–460. Elsevier Ltd, 2010.
- [69] Yoshinobu Miyamoto. Origami 7: The 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education, Vol. III.
- [70] 佐野理. 連続体の力学, 2000.
- [71] 松本大地. 円筒形弾性シェルの幾何力学: かたちが生み出す硬さとしなやかさ. PhD thesis, 立命館大学, 2019.
- [72] 信越シリコーン. シリコーンとは? <https://www.silicone.jp/info/begin.shtml>.

発表論文リスト

- 紙ばね関連

Taiju Yoneda, Daichi Matsumoto, and Hirofumi Wada. Structure, design, and mechanics of a paper spring. Physical Review E, Vol. 100, No. 1, p. 013003, 2019.

- RES 関連

Taiju Yoneda, Yoshinobu Miyamoto, and Hirofumi Wada. Structure, design and mechanics of a pop-up origami with cuts. to be published in Physical Review Applied, 2022.