Abstract of Doctoral Dissertation

Title: Stability problems of stochastic differential equations by a symmetric stable process

Doctoral Program in Advanced Mathematics and Physics
Graduate School of Science and Engineering
Ritsumeikan University

ナカガワ　タクヤ
NAKAGAWA　Takuya

In this article, we consider a coefficient stability problem for one-dimensional stochastic differential equations driven by an α-stable process $Z=(Z_t)_{t\geq 0}$ with $\alpha\in(1,2)$. Komatsu (1982) showed the pathwise uniqueness of solutions following a stochastic differential equation $X_t=x_0+\int_0^t\sigma(X_{s-})dZ_t$ where $X_{s-}:=\lim_{t\to s-0}X_t$ if σ is $1/\alpha$-Hölder continuous. Now we consider the sequence of diffusion coefficients $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and the corresponding stochastic differential equation $X_t^{(n)}=x_0^{(n)}+\int_0^t\sigma_n(X_{s-}^{(n)})\,dZ_t$. Stability problem for solutions of stochastic differential equations driven by a semimartingale with Lipschitz coefficients has been developed by Protter (2005). Hashimoto (2013) proved the convergence in the $L^\beta(\Omega,\mathbb{P})$-norm of the time-supremum distance between two solutions with $\beta\in(1,\alpha)$ when the sequence $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges to σ and satisfies Komatsu condition, but the author did not obtain the rates of convergence. Hashimoto and Tuchiya (2013) obtained the rates of convergence p which depends on the problem parameters by $L^\infty(\mathbb{R},Leb)$ distance of the coefficients, that is $sup_{t\in[0,T]}E\left[|X_t-X_t^{(n)}|^{\alpha-1}\right]\leq C||\sigma-\sigma_n||_\infty^p$ if $x_0=x_0^{(n)}$ and the diffusion coefficients σ and σ_n have the same Hölder coefficient.

The aim of this paper is to extend the results of Hashimoto and Tuchiya (2013). More precisely, we find an upper bound for the $L^{\alpha-1}(\Omega,\mathbb{P})$ distance between two solutions in terms of the $L^\alpha(\mathbb{R},\mu_{x_0}^\alpha)$ distance of the coefficients for an appropriate measure $\mu_{x_0}^\alpha$ which characterizes symmetric stable laws and depends on the initial value of the stochastic differential equation. That is we obtain $sup_{t\in[0,T]}E\left[|X_t-X_t^{(n)}|^{\alpha-1}\right]\leq|x_0-x_0^{(n)}|^{\alpha-1}+C||\sigma-\sigma_n||_{L^\alpha(\mathbb{R},\mu_{x_0}^\alpha)}^p$. We obtain this result using the method introduced by Komatsu (1982) which is used in the proof of uniqueness of solutions together with an upper bound for the transition density function of the solution of the stochastic

differential equation obtained by Kulik (2014).

The results presented in this paper are for one-dimensional stochastic differential equations, and it is not known whether similar results can be obtained for multidimensional stochastic differential equations as well. It is also not known whether similar results can be obtained for stochastic differential equations with a drift term added: $X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_{s-})\, dZ_t$.

論文題名：対称安定過程による確率微分方程式の安定性問題

立命館大学大学院理工学研究科
基礎理工学専攻博士課程後期課程
ナカガワ　タクヤ
中川　卓也

本論文は、１次元確率微分方程式$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_{s-})\,dZ_t$の解の性質について新たな発見した事に意義がある。ただし$Z = (Z_t)_{t\geq 0}$は対称α安定過程(ただし$1 < \alpha < 2$)とし、$X_{s-} := \lim_{t\to s-0} X_t$とする。$\alpha = 2$の時$Z$はブラウン運動であり、このとき山田・渡辺(1971)よりσが$1/2$ヘルダー連続ならば解の pathwise uniqueness という唯一性が満たされる事を示した。先行研究として、小松(1982)より拡散係数σが$1/\alpha$ヘルダー連続ならば解は pathwise uniqueness という唯一性を満たす事がよく知られている。また Kulik(2019)により唯一な弱解の存在と解の密度関数の表現が与えられている。ここで拡散係数の列$(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$と対応する確率微分方程式$X_t^{(n)} = x_0^{(n)} + \int_0^t \sigma_n(X_{s-}^{(n)})\,dZ_t$を考える。この確率微分方程式の収束問題は安定性問題と呼ばれ、Zがセミマルチンゲールの時、拡散係数がリプシッツ連続な確率微分方程式の安定性問題については Protter(2005)などで研究されている。橋本(2013)は$\beta \in (1,\alpha)$かつ有界な拡散係数σとσ_nが同じヘルダー連続かつ$(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$が$\sigma$に$sup$ノルムの意味で収束するならば、時間に関して$sup$を取った解の差の平均の極限が$0$に収束、つまり$\lim_{n\to\infty} E\left[sup_{t\in[0,T]}|X_t - X_t^{(n)}|^{\beta}\right] = 0$である事を示したが、どの程度の速さで収束するかは示していない。解の差の平均に関し収束速度が与えられた先行研究として、橋本・土屋(2013)は初期値に関し$x_0 = x_0^{(n)}$かつ有界な拡散係数σとσ_nが同じヘルダー連続ならばパラメータに依存した値pを用いて$\sigma - \sigma_n$のsupノルムによる解の差の平均の評価(i)$sup_{t\in[0,T]} E\left[|X_t - X_t^{(n)}|^{\alpha-1}\right] \leq C||\sigma - \sigma_n||_\infty^p$を得ている。

本結果の新規性は橋本・土屋(2013)の結果の拡張であり、$sup_{t\in[0,T]} E\left[|X_t - X_t^{(n)}|^{\alpha-1}\right]$に関し拡散係数の差の重み付き$L^\alpha$ノルムによる評価を得たことである。より正確には有界な拡散係数σとσ_nが異なるヘルダー係数を持つ場合でもパラメータに依存した値pを用いて、解の差の平均に関し初期値の差と$\sigma - \sigma_n$の重み付きのL^αノルムの和の評価
$sup_{t\in[0,T]} E\left[|X_t - X_t^{(n)}|^{\alpha-1}\right] \leq |x_0 - x_0^{(n)}|^{\alpha-1} + C||\sigma - \sigma_n||_{L^\alpha(\mathbb{R},\mu_{x_0}^\alpha)}^p$を得たことである。ただし$\mu_{x_0}^\alpha$は初期値$x_0$とαに依存した有限測度$\mu_{x_0}^\alpha(dy) := \min\{|y - x_0|^{\alpha-1}, 1\}\,dy$であり、初期値$x_0$からの距離に応じて減少するという特徴を持つ。また空間$L^\alpha(\mathbb{R},\mu_{x_0}^\alpha)$はこの測度による$L^\alpha$ノルム$||f||_{L^\alpha(\mathbb{R},\mu_{x_0}^\alpha)} := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^\alpha \mu_{x_0}^\alpha(dy)\right)^{1/\alpha}$が有限となる可測関数$f$:ℝ →ℝ の集合によって構

成される。本結果はKulik(2019)の確率微分方程式の解の密度関数の表現に関する結果を用い、橋本・土屋(2013)の方法を見直す事で得られた。

この拡張の利点は$x_0 - x_0^{(n)}$が0に収束し、$\sigma - \sigma_n$がsupノルムの意味で0に収束しなくともこの重み付きL^αノルムの意味で0に収束すれば$sup_{t\in[0,T]} E\left[|X_t - X_t^{(n)}|^{\alpha-1}\right]$が$0$に収束するという点である。より詳しく述べると、初期値x_0から遠い点における$\sigma - \sigma_n$の評価が不明だとしても解の差の平均は0に収束するという点で、$sup_{t\in[0,T]} E\left[|X_t - X_t^{(n)}|^{\alpha-1}\right]$が収束する$\sigma$と$\sigma_n$の適用できる橋本・土屋(2013)の結果より多い。

本論文で示されたのは１次元確率微分方程式に関してであり、多次元確率微分方程式においても同様な結果を得られるかは分かっていない。ドリフト項を加えた確率微分方程式$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_{s-})\,dZ_t$について同様な結果が得られるかどうかは分かっていない。