

博士論文

円筒形弾性シェルの幾何力学：

かたちが生み出す硬さとしなやかさ

(Geometric mechanics of a cylindrical elastic shell:

Its structural rigidity and flexibility)

2019年3月

立命館大学理工学研究科

基礎理工学専攻博士課程後期課程

松本大地

立命館大学審査博士論文

円筒形弾性シェルの幾何力学：

かたちが生み出す硬さとしなやかさ

(Geometric mechanics of a cylindrical elastic shell:

Its structural rigidity and flexibility)

2019年3月

March 2019

立命館大学理工学研究科

基礎理工学専攻博士課程後期課程

Doctoral Program in Advanced Mathematics and Physics

Graduate School of Science and Engineering

Ritsumeikan University

松本大地

MATSUMOTO Daichi

研究指導教員：和田 浩史 教授

Supervisor: Professor WADA Hirofumi

円筒形弾性シェルの幾何力学：
かたちが生み出す硬さとしなやかさ

松本大地

2019年2月14日

謝辞

本論文は筆者が、立命館大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻博士課程後期課程に在籍中の研究成果をまとめたものである。同専攻和田浩史教授には指導教官として本研究の実施の機会を与えて戴き、その遂行にあたって終始、丁寧なご指導をいただいた。ここに深謝の意を表す。東京理科大学工学部機械工学科の福留功二助教には、研究遂行にあたり多くの助言や、議論をしていただいたことに深謝の意を表す。立命館大学で筆者と同じ研究室の佐野友彦博士には、研究遂行にあたり多くの助言や議論をしていただくとともに、日頃の会話や食事の場などで、いろいろな相談をさせていただいた。ここに深謝の意を表す。九州大学工学研究院機械工学部門山口哲生准教授、立命館大学理工学部物理科学科是枝聡肇教授、清水寧教授には本研究に関して的確で、重要な多くの助言を頂いた。ここに深謝の意を表す。

東京首都大学谷茉莉博士には、研究遂行にあたり議論や多くの助言をしていただいた。京都大学大村拓也博士、同志社大学鷹取慧博士には、研究に関する議論や、日頃の悩みなども聞いていただいた。筆者と同じ研究室に所属している米田大樹氏、末廣和氏、西村莉奈氏、石井博文氏には、日頃から研究に関する活発な議論をしていただいた。また、研究室の卒業生である中村圭吾氏、谷口凌氏、高木俊明氏、浅野杏太氏には、在籍時に活発な議論をしていただいた。ここに深謝の意を表す。

最後に、筆者の家族である松本茂樹氏、松本久美氏、松本一樹氏には、長期間に渡り暖かい支援をしていただいた。ここに深謝の意を表す。

概要

線と面は、自然と人工の造形を担う基本的な構成単位 (building block) である。したがって、我々の身の回りには、さまざまな薄い構造物 (thin structure) をみいだすことができる。いわゆる薄板やシェル構造 (自発曲率を持つ薄板) は、昆虫の羽、植物の葉や花びらなどの生物のかたちにはじまり、紙、ペットボトル、車のボディなどの多種多様な工業製品からドーム状の建築物にいたるまで、環境、対象、スケールを問わず偏在する。これらを構成する材質はどれも異なるが、ひとつの空間次元の広がりがある他の二つに対してスケール分離が成立するほどに小さく、それを曲面とみなせるといふ幾何的事実は共通している。そして、その幾何学的な性質と力学の親密なかかわりからうみだされる剛性、しなやかさ、あるいは乱雑さが、それぞれの造形物がしかるべき機能を果たすことを可能にする。ここには、材質ではなく構造や形態を追求することで物質に望ましい機能性を持たそうとする思想がある。それは、自然界と人工物に通底するメカニカルデザインの原理ともいえる。

平板やシェルの力学特性は構造力学の古典的問題であり、これまでに膨大な学問的蓄積がある。曲面の幾何学と連続体力学の深い結びつきが、この分野の中心的なコンセプトである。薄膜には引っ張りと曲げという二つの変形モードがあるが、板が薄いほどそれらはエネルギー的に大きく分離する。曲げは起きやすく、引っ張りには大きなエネルギーコストが伴う。このため、薄膜の形状はなるべく引っ張りを少なくする変形 (isometric な変形) を探し求める。しかし、曲面の二方向に対して曲率を変化させる変形は必ず面内の計量の変化を伴う (ガウスの大定理)。その結果、薄膜はしばしば折り目やとがりを形成する (丸めた紙など)。薄膜における特異的なパターン形成は物理学のホットトピックであり、近年、多くのことが明らかになった。

幾つかのクラスでは、特異的な局在構造の形成を伴わない、もっと拡散的な変形が現れる。例えば、ストローの一端をピンチする (つまむ) と、その周辺は強く変形する。ピンチした場所から離れるにしたがって変形は減衰し、やがてストローの径はもとのサイズを回復するが、その回復長はストローの全長、半径、厚みのどれとも異なる固有の長さスケールである。この単純な現象は、シェルの力学特性を端的に示す好個の例である。従来、このような研究は、円筒や球面など対称性の高い曲面に限定してよく研究されてきた。なぜならば、完全な球形または円筒形のシェルは局在した荷重に対して強い剛性を示すが、その起源を理解することは、シェルの幾何力学の中心的課題のひとつだからである。

これに対して、自由境界をもつ開いたシェルは、荷重に対してかなり違った応答を示す。自由境界はほとんど伸びない変形を引き起こし、そのようなシェルは大きく変形することができる。閉じたシェルではこのようなふるまいは禁止されるため、この二つの系には本質的な差異が存在する。本研究では、開いた円筒シェルをモデルシステムとして選び、その力学的特性を解析理論、数値シミュレーション、計測実験を組み合わせて詳細に調べた。具体的には、我々は円筒シェル的一端をピンチし、誘起した変形が軸に沿って減衰し、シェルが元の形状に戻るまでの長さを調べた。我々はこの特徴的長さを回復長と呼ぶ。我々はまず、浅い半円筒シェルに対して回復長の新しいスケーリング則を理論的に導出した。次に、有限要素法による数値シミュレーションと実際の模型をもちいた精度の高い測定実験を実施し、このスケーリング則を確立した。加えて、これらの実験結果から、浅いシェルに対して導いたスケーリング則が、任意の深さのシェルに対して正当であることを発見した。また十分深い開いた円筒シェルは閉じた円筒の回復長を超えることも示した。我々は、これらの発見を shallow shell theory の詳しい漸近解析によって正当化した。以上の結果は、開いたシェルに対しては、自発曲率と自由境界の織りなす新たなタイプの相互作用が本質的な役割を果たすことを示唆している。

本論文で得られた結果は、シェルの自由境界が曲げと伸びの力学的バランスを質的に変化させることを明らかにする。この知見は、単子葉の葉っぱを代表例とする薄い生物学的構造の形態形成やその機能、あるいはメジャーテープをはじめとするさまざまな工業製品の機能と力学的特性を、より深く、より基礎から理解するための重要な知見をもたらすものである。

目次

第 1 章	背景	6
1.1	物のかたち	6
第 2 章	薄い構造物の力学	17
2.1	応力とひずみ	17
2.2	伸びと曲げのエネルギー	21
2.3	オイラー座屈	23
2.4	折り目の力学	25
2.5	ガウスの大定理	27
第 3 章	本研究の目的	32
3.1	幾何学的な剛性	32
3.2	本論文での課題	36
第 4 章	円筒形シェル	38
4.1	完全な円筒形シェル	38
4.2	開いた円筒形シェル	44
4.3	閉じた円筒形シェル (先行研究)	47
4.4	平坦な strip の回復長	49
4.5	本研究のモデル	53
4.6	スケーリング解析	54
4.7	実験	57
4.8	数値計算	65
4.9	結果	68
4.10	考察	71
4.11	まとめ	78
4.12	展望	79
付録 A	3次元の弾性体	81
A.1	弾性体とは	81

A.2	弾性体の変形	81
A.3	2つの近似	82
A.4	変形テンソル	83
A.5	ひずみ：幾何学非線形	84
A.6	応力とは	91
付録 B	薄い構造物の力学	107
B.1	板の平面変形:2次元弾性論	108
B.2	板の弱い曲げ変形 (キルヒホッフ理論)	109
B.3	モーメントのつり合い	111
B.4	Shallow Shell Theory (Foppl-von Karman 方程式を含む)	120
B.5	曲面の一般論による導出	123
B.6	力のつり合いの式の導出	126
B.7	2次元の Gauss の定理	127
付録 C	曲面の微分幾何	132
C.1	第一基本形式	132
C.2	第二基本形式	133
C.3	Weingarten 方程式	133
C.4	クリストッフエル記号	134
C.5	ガウスの大定理	135
付録 D	Abaqus の使い方	137
D.1	Abaqus の基礎方程式	137
D.2	Abaqus の起動	137
D.3	モデルの作成	138
D.4	計算の実行	148
参考文献		151

第 1 章

背景

1.1 物のかたち

1.1.1 様々なかたち

我々の周りには、いろいろなかたちのものがある。ペンや本、ライトに PC、マグカップにイヤホンなど目に見える範囲にも、たくさんのかたちを発見することができる。今あげたものは工業製品であり、「人間」が使うことを前提に作られたものばかりである。もちろん人間にも「かたち」はある。目や鼻、口、手、足、爪、髪の毛などさまざまな部分から構成されている。また少し外を散歩すると、様々な動植物に出会うことができる。花壇に植えられた園芸植物や樹木、道端の雑草、畑の野菜、クモやアリ、夜の街灯に群がる昆虫、鳥、犬や猫、小川にいる魚や亀など、数多くの生物が身の回りに存在する。ほかにも、車や電車、電柱、看板、高いビルや小さな店、線路、ガードレール、信号、寺、駅などいろいろな工業製品や建造物を見ることができる。

当たり前のことだが、我々は 3 次元空間の中に存在している。適当なところに xyz 直交座標軸を設定すると、空間中の一点を唯一指定することができる。このことは、上述した全ての物体は独立な 3 つの長さ L_x, L_y, L_z を持っていることを意味している。つまり、どのような物体でも 3 次元的な広がりを持っている。

一方で、3 つの長さのうち 1 つの長さが他の 2 つに比べて十分小さい時、その物体は棒やひものような形状になる (図 1.1(a))。例えば $L_x, L_y \ll L_z$ の時などである。この時、物体の形状はほぼ 1 次元の曲線で近似できる。この時の断面の変形 (x, y 方向の変形) は非常に小さいので、曲線に沿った z 方向の変形を考えることで棒の力学を構築することができる [1]。これとは逆の場合、つまり $L_x, L_y \gg L_z$ の時などは、物体は薄い膜や殻のような形状とみなせる (図 1.1(b))。この場合も先ほどと同じ議論で、断面方向である z 方向の変化は十分小さいとみなせるので、曲面から垂直にどれだけ変位するか考えることで、薄い膜の理論が構築できる [1-3]。さらに 3 つの次元が全て異なる場合、つまり $L_x \gg L_y \gg L_z$ の

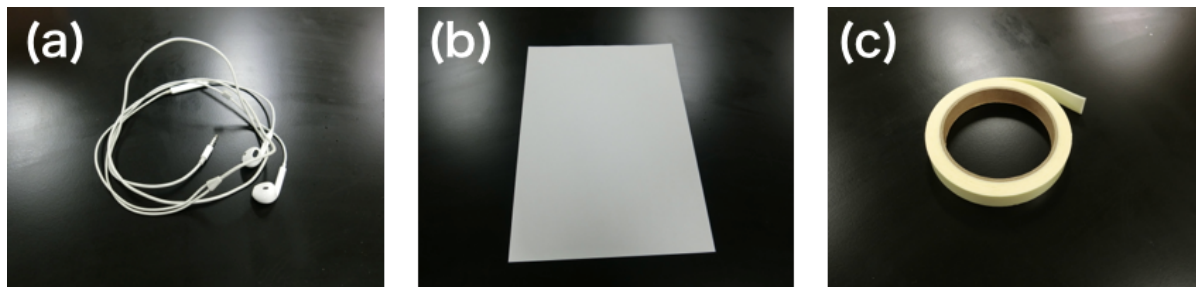


図 1.1. 1 次元的な構造をしているイヤホン (a)。2 次元的な紙 (b)。1 次元と 2 次元中間の構造をもつテープ (c)。

時、物体の形状はリボンである (図 1.1(c))。この場合は、力学的に 1、2 次元の場合では見られなかった振る舞いが見られ、近年でも活発に研究されている [4, 5]。

上のようなスケールの違いに注意して自然界や工業製品を観察すると、我々の身の回りにはたくさんの 1、2 次元的な構造物が存在する。上述したようにひもやイヤホン、さまざまなコード、自然界でもさまざまな毛や植物のつる、枝などが 1 次元的なものとしてあげられる。2 次元的なものは、工業製品では紙、衣類、ペットボトルなどいたるところに存在し、自然界でも植物の葉や細胞の膜など数多く存在する。またこれらは常に独立して存在するわけではなく、ほとんどのものはそれらが組み合わされてできている。この 1、2 次元的な幾何形状の組み合わせが物体の複雑さを生み出している。したがって、線や面の幾何形状と力学を組み合わせる考えることが本質的に不可欠になる。

1.1.2 幾何学と力学

ものの「かたち」を数学的に記述するためには幾何学を用いる。一方で、ものの変形や復元力を考えるためには、力学を考える必要がある。物をつくる時に、かたちだけを考えて、その頑丈さを考えなければあまりいい設計とは言えないだろう。建物や構造物を作る時には、その安全性などを評価する必要がある。ただ単に丈夫なものを作ろうと思えば、硬くて断面が太いものを利用すれば良い。しかし我々が何かを設計するときは、安全性や機能性をあげたいと思うはずである。もしくはできるだけ少ない材料で丈夫なものを設計したい。これらの要求のため、我々は 1、2 次元的なものを組み合わせて様々な構造物を設計する。機能的なものを設計するためには幾何学は必要不可欠なのである。

このような 1、2 次元パターンとの組み合わせは工業製品だけではなく自然界でも多く見られる。植物は、多種多様幾何形状の器官で構成されている。例えばカラスウリのつるは、つる巻きばねのようにぐるぐると巻いた構造をしている (図 1.2(a))。この植物のつるが巻く

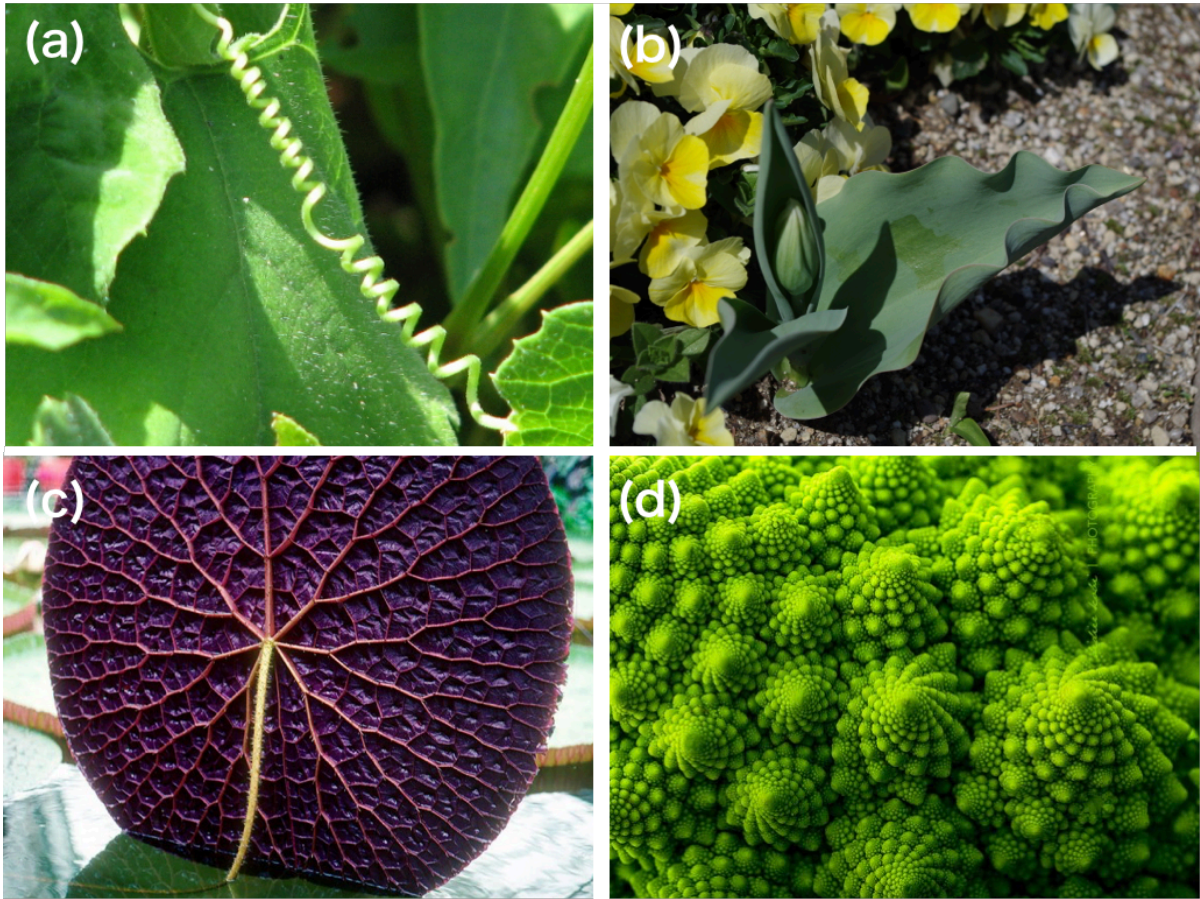


図 1.2. (a) カラスウリのつるのコイリングとその向きの変換。(b) チューリップの葉の波打ち。(c) オオオニバスの葉脈の樹状パターン。(d) ロマネスコに見られるフラクタルパターン。

現象は、Darwin も興味をもっており、詳しく調べていたことが知られている [6]。この巻きひげは図 1.2(a) のように、ねじれの向きが途中で変わることがある。巻きひげの曲率自体はひげが物体と接触することにより、成長物質が極性を持って分泌されることによる、偏差成長によって形成される [7]。この巻きひげの内部にはリボン状の硬い繊維があることが調べられており、それがつる全体を拘束することによってコイリングが引き起こされる [7]。

我々は日常的に葉っぱが波打っている形状をよく目にする。スーパーに行けばレタスなどの葉物の野菜を目にすることができるが、それらは端に行くほど細かい波打ち構造を持っていることが観察できる。レタスほど細かくはないが他の植物でも葉っぱの波打ちは観察することができる (図 1.2(b))。この現象は植物の遺伝子で決まっているというよりはむしろ、幾何学的、力学的な拘束によって引き起こされている [8]。植物の葉がどのように成長するかは、遺伝子や周りの環境で決定する。もし中心付近よりも葉の境界付近での成長が早い場合、成長した部分の葉はその少し内側よりも、曲面に沿った長さが少し長くなっている。内側だった部分もまたその少し内側よりは長くなっている。このような成長が起きると、植物の葉は幾何学的な制約により、その曲面はもはや平坦ではいられなくなる。詳しくは後述す

るが、これにより面内に座屈が発生した結果が、葉っぱの波打ちである。

他にも、オオオニバスの葉の裏側の葉脈は整然とした樹状パターンを形成する (図 1.2(c))。植物の葉は光合成をし、エネルギーを生み出す。また根から吸収した水分などを、葉まで持ち上げる必要もある。葉全体で効率よく物質を輸送するために、葉脈は複雑な構造をしている、と言われている [9]。原始的なイチョウのような植物では、葉脈パターンは単純なものだが、図のように、一般には複雑なネットワークを形成している。この葉脈の形成過程は、様々な数理モデルが考えられているが、成長を促進させる物質とそれを抑える物質の反応拡散によるせめぎあいの結果、このようなパターンが生まれると考えられている [10]。反応拡散によるパターンは魚の表面の模様など生物界で広く見ることができる現象であり、1950年代からチューリングによって予測されていた [11]。チューリングパターンによるパターン形成は植物の壁孔などでも見ることができ [12]、生物の模様や構造を形成する際に、普遍的に見られるメカニズムである。

ロマネスコの蕾は、らせん状のフラクタルパターンを形成する (図 1.2(d)) [13]。フラクタルパターンは他にも先ほど述べた葉脈や、木の枝、貝殻、血管などで観察することができる。フラクタルは幾何学の概念であり、部分と全体が一致するような自己相似形のことを言う [14]。フラクタルは限られた体積で、表面積を大きく取ることができる構造である。様々な理由でこのような構造は選択されており、類似する形状はいろいろなところで観察することができる。先ほどのレタスの葉なども、フラクタル構造として知られている [1]。このように、生物においては幾何学的、力学的に効率の良い形状を選択している例がたくさん存在する。

1.1.3 工業製品のかたち

工業製品は我々の身近に存在し、現代人が生活していくにはなくてはならないものが数多く存在する。18世紀に産業革命が起こり、蒸気機関が発明され (図 1.3(a))、様々なものが大量に生産され利用されるようになるとともに、工業製品のかたちも多様化していった。工業が発展するのと同時に、自然科学も発展した。工業の発展と科学技術の発展は密接に関係しており、技術的な必要性があらたな科学技術を生むこともあった。

車が発明されたのも、産業革命が起こった直後だった (図 1.3(b))。蒸気を利用した車が発明されたが、当時の車の速度は 10km/h 以下だったと言われている。現在、販売されている車は、流体力学的に効率の良いかたちをしており、乗り心地もよく、非常に洗練された形状をしている。また車の軽量化や様々なデザインを可能にするために、ボディには薄い金属が使われる。薄い金属を利用する際に強度は一定以上必要であるため、幾何学形状を工夫することによって頑丈な構造がデザインされている。卵は硬いシェル構造として有名だが、

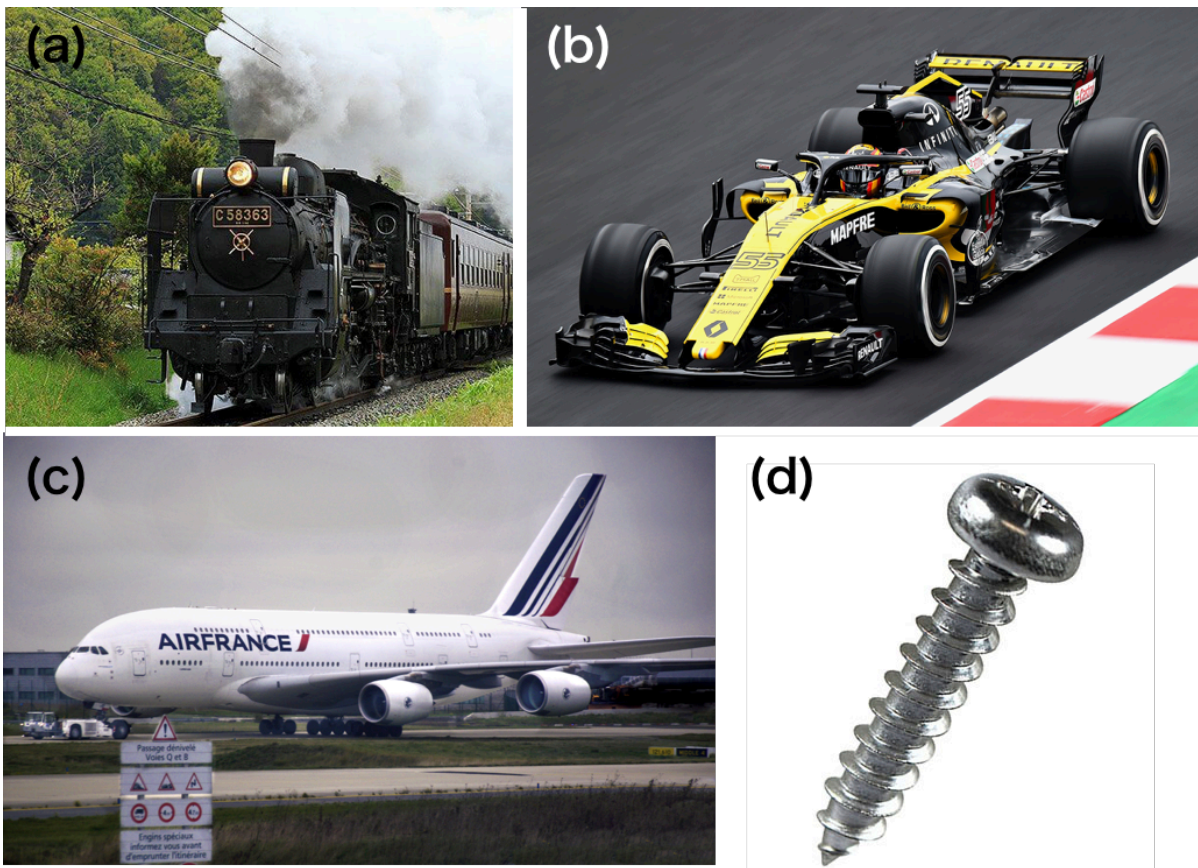


図 1.3. (a) 蒸気機関を利用した機関車。産業革命以後、鉄道が普及し多く利用された。(b) レースカーは速く正確に走るために様々な工夫が施されている。(c) 飛行機は大量の人やものを移動するために利用されている。(d) ネジはいくつかの部品を結合する際に利用される。

丸い卵型の車が増えているのは、機能性や利便性を追求する中でたどりついた形状と考えられる。

飛行機が発明され、人類は空を飛べるようになり、空を利用した移動や輸送が可能になった(図 1.3(c))。飛行機は重力に逆らって、空に飛び上がり移動する乗り物である。翼のかたちを工夫し、重力よりも大きな揚力を得ることによって、機体は飛ぶことを可能にしている。飛行機のボディには薄い金属が利用されており、機体の質量を減らすために工夫されている。飛行する際の翼の構造は、鳥の羽などに見られる構造が利用されている。

ネジは部品を組み立てる時に利用され、現在ではどこにでも見ることのできる製品である(図 1.3(d))。ネジの構造は、アルキメデスが発明したとも言われており、長い歴史がある。ネジは様々なところに使われる基本的な部品であるが故に、その構造の精密さや丈夫さは特に重要である。その形は円柱のまわりに、薄い板をらせんに巻いたような複雑な形をしている。物体に入り込んだネジは、摩擦力を利用して締まる力を生み出している。基本的には一度打ち込んだら外さない釘とは異なり、一度開けたネジ穴は、ネジを締めたり緩めたり可逆

的に利用できる。

自然から学び、それを工業製品に利用する分野を、バイオミメティクスやバイオミクリーと呼ぶ [15]。近年は顕微鏡の発展により、ナノスケールのより微細な構造を見ることが可能になり、細かいナノ構造を作り出すことで性能を真似する技術が生まれた。ヤモリの指はその代表的な例である [16](図 1.4(a))。ヤモリが家の壁に沿って、這って移動する姿を見たことがある人も多いだろう。ヤモリは、壁に接している指が壁にくっつく力で自重を支えている。ヤモリの指の先には細かい毛がたくさん生えており、分子間力によって壁にくっつくことができる。この構造を模倣したテープが実際に作られており、接着力が落ちることなく何回もくっつけることができる。

サメは餌を捕獲するために、餌よりも高速で水中を移動する必要がある (図 1.4(b))。サメの肌の構造は泳ぐ時の流体抵抗を減らし、より速く泳ぐことを可能にしている [17]。サメの肌の細かい構造をみると、硬い鱗のようなもので覆われている。この鱗のような肌は、細かい凹凸を表面に作っており、そこでは小さな渦が形成される。この渦が肌表面の流体抵抗を減らすことでサメは速く動くことができる。

犬や猫は、暗闇で目が光を反射するのですぐに見つけることができるが、蛾の目は、光を反射しないので、夜に姿を隠すことに役立っている (図 1.4(c))。蛾の目は、光の波長よりも小さい構造の突起物で覆われており、この構造によって反射しない仕組みを作っている。この構造と似たような表面を用意することによって、この性質を再現することができる [18]。この構造は蛾の目の構造を真似したことから、「モスアイ」構造と呼ばれる。このモスアイ構造を利用したフィルムが製造されている。これは太陽光など、光のもとで画面を見たとしても、フィルムを貼った画面が光を反射しないので、人の目ではっきりと見ることができる。

他にも、バイオミメティクスの例はたくさんある。蓮の葉は、水を弾くことで有名である (図 1.4(d))。蓮の葉の表面には、マイクロメートルレベルの微細構造があり、それが水を弾く構造を作っている [19]。この構造は、ヨーグルトの蓋の裏側にも採用されており、ヨーグルトがベタベタとくっつくのを防いでいる。オナモミは動物の毛に果実をひっつけることによってより遠くまで種子を運んでいる (図 1.4(e))。そのオナモミの果実の、かぎ爪の構造を利用したものが、マジックテープとして知られている商品である [20]。カエデの種子は3本の羽が生えており、風を利用して遠くまで種子を運ぶことができる (図 1.4(f))。この構造はドローンなどに利用されており、効率よく飛ぶことができる [21]。このように生物由来の構造に着想を得て、工業製品に利用することは、便利なものを生み出すアイデアになるとともに、新たな仕組みを我々に気づかせてくれる。

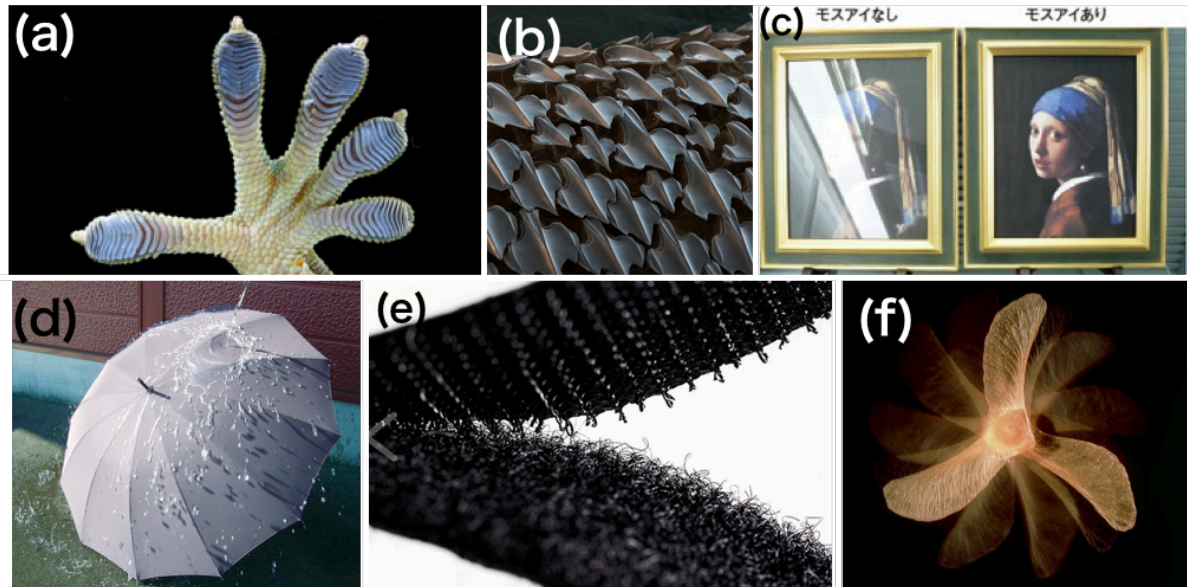


図 1.4. 生物のかたちを模倣して工業製品に応用する分野をバイオミメティクスという。その中でも有名なものを紹介している。(a) ヤモリの足の詳細な構造 (b) うろこ状のサメの肌の様子。(c) 蛾の目を利用した「モスアイ」構造を利用した、光を反射しないフィルムの使用例。(d) 蓮の葉の表面構造を利用した、水を反射する傘。(e) オナモミの果実の構造を利用したマジックテープ。(f) カエデの種子の回転する様子。

1.1.4 生物のかたち

自然界には実に多種多様なかたちをした生物が存在する。上述したヤモリの足、蓮の葉、葉っぱのフラクタル、樹状構造、サメの肌など枚挙にいとまがない。同じ生物であっても、成長することによって形状が変化したり、環境によって大きさや色が変わるものもある。生物は多様であり、生存していくためには、それらの違いが重要なのだろう。しかし、多種多様な生物ではあるが、それらのかたちの中に類似する点を探し出すことはできる。そうした普遍性の中に、生物がそのかたちをもつ理由を見つけ出すことができる、と期待する。

現在、存在している生物は、自然界の生存競争の中で生き残ったものである。したがって、絶滅した生物に比べて、なんらかの有利な点があったと考えられる。もちろん周りの環境はどんどんと変化していくので、現在のかたちが存在し続けることも難しいだろう。生物は重力の中で生存してなくてはならない。したがって、必然的にかたちには制限がある。生物学の分野では、かたちは遺伝子で制御されていると考えられている。もちろんそれはそうなのだが、それはそのかたちを作る理由であって、そのかたちが選択された理由であるとはいえないだろう。我々は生物のかたちの理由を理解するために、物理学や幾何学を用いる。後述するが、そうすることでかたちが選ばれる理由はすっきりと理解でき、なぜそのかたちが残っているのかを考える手がかりにもなる。

自然界には、興味深い生物のかたちがたくさん存在する。それらは工業製品に応用され、我々の生活を豊かにする。一見複雑に見える生物の構造も、その構造や動作の本質が分かれば、生物現象へのより深い理解が得られ、工業製品への応用も可能になることを述べてきた。生物の「かたち」や「うごき」を物理学のことばで説明しようという研究は D'arcy

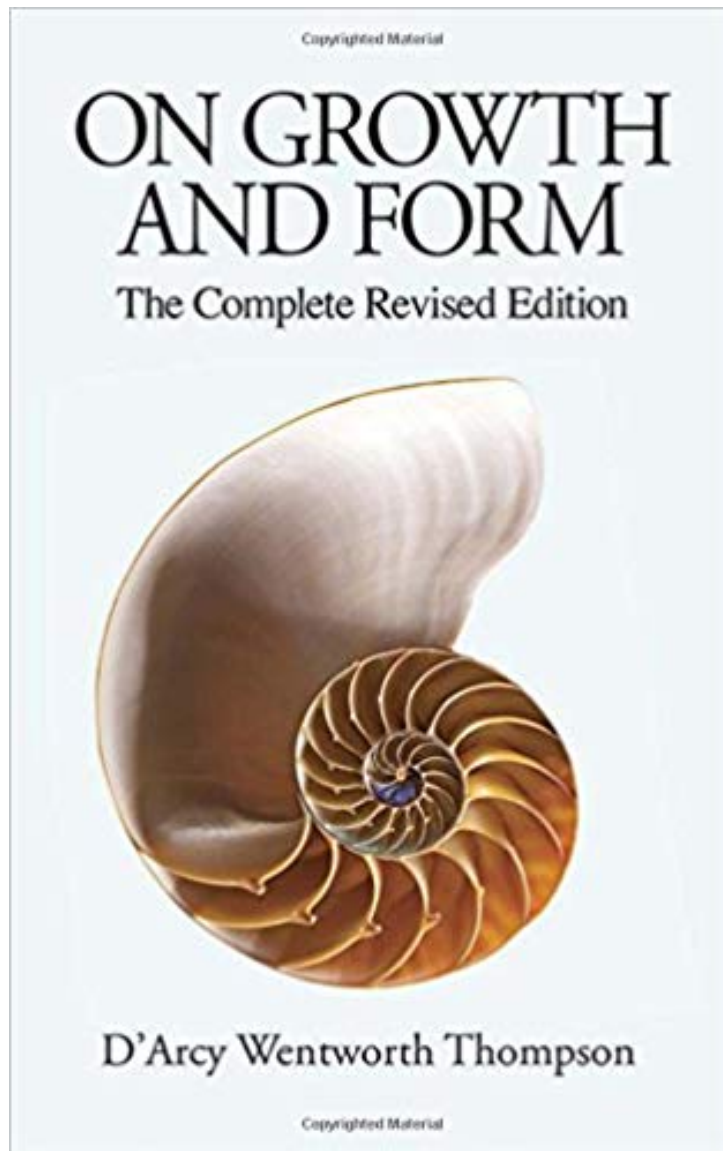


図 1.5. D'arcy Thompson の著書、“ON GROWTH AND FORM”

Thomson [22] 以来盛んに行われてきた。分子生物学が発展した現在ですら、その動きは衰えるどころか、ますます盛んになっているように思われる。これは遺伝子レベルで生物が理解できても、そのマクロな結果である「かたち」や「うごき」は完全には理解できないことが原因である。生物を理解しようとする時、様々な側面からのアプローチが必要である。我々は物理学の言葉で生物を理解しようとする。弾性体の理論を用いて生物を説明しようとする試みは、現在でも活発に行われている。ここではいくつかの例を紹介する

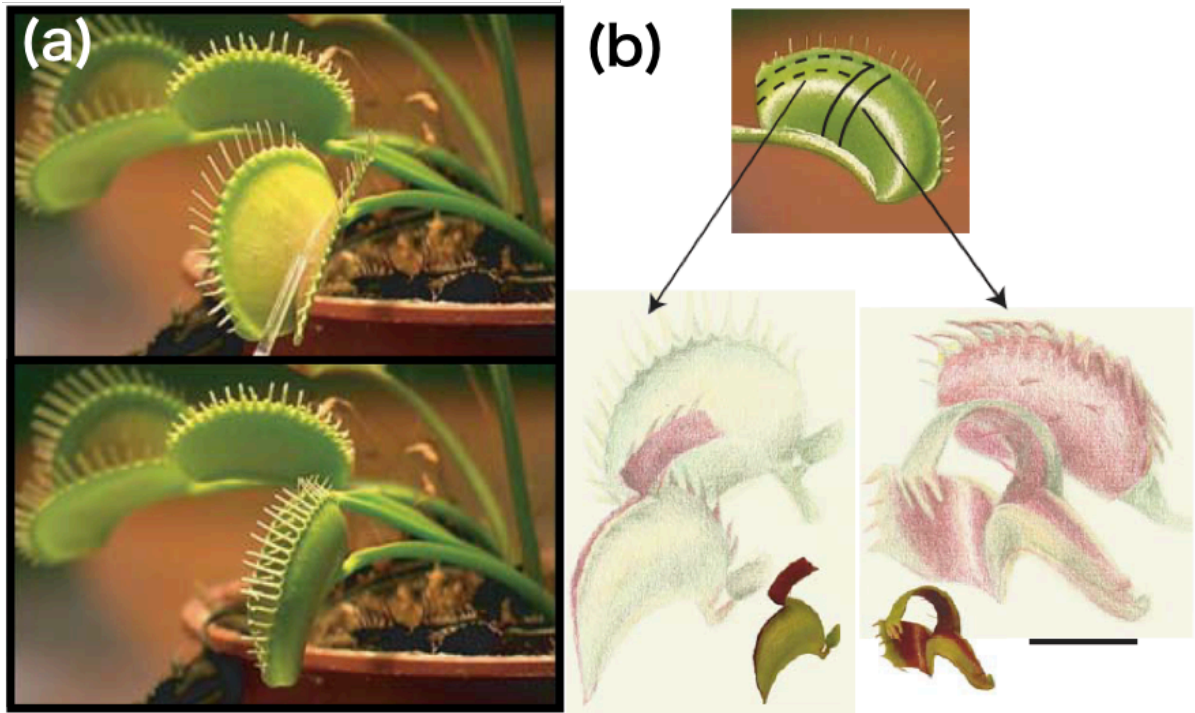


図 1.6. (a) ハエトリソウの開いた状態 (上) と閉じた状態 (下)。 (b) 切り開いた時にどのように変形するかを観察することで、ハエトリソウの葉がどのようにひずんでいるのかを知ることができる [23]。

Darwin はハエトリソウ (Venus flytrap, *Dionaea muscipula*) のことを”one of the most wonderful in the world” と記している [24]。食虫植物として有名なこの植物は、植物界で素早い動きをするものとして、最もよく知られている植物のひとつである [23]。ハエトリソウには感覚毛と呼ばれる毛が葉の内側に生えており、これが刺激されることで、葉の閉じる動作が引き起こされる。ハエトリソウの葉は、感覚毛を刺激されると、葉内部の膨圧を変化させる。これにより幾何学的な形状の変化が引き起こされ、ひずみが蓄積する。このひずみが臨界点を越えると葉は飛び移り座屈 (snap-through buckling) を起こし、ハエトリソウは、ハエなどの昆虫や動物を捕獲し消化・吸収することが知られている (図 1.6)。すなわち、ハエトリソウはスナップ座屈を利用することで、素早い動きを手に入れている。

食虫植物には他にも、ウツボカズラやモウセンゴケ、タヌキモなどがある。ウツボカズラは、東南アジアに広く分布する食虫植物として知られているが、ハエトリソウのように動いて昆虫を捕獲することはない。ウツボカズラは、容器型の葉の内部に消化液を蓄えている。この消化液は粘弾性流体の性質を示し、一度虫がその中に入ると逃げられないような濃度に保たれている [25]。

タヌキモは、世界中に分布する水中にいる植物である。タヌキモの捕獲の機構も座屈が利用されているが、こちらはハエトリソウのようなスナップ座屈ではない [26]。タヌキモは内部の水を常に排出し、捕獲嚢内部の圧力を下げている [27]。捕獲対象が近づき、感覚毛に触

れると口を開き一気に捕獲する。この捕獲時の動作の時に捕獲囊は座屈を起こす。この一連の行程は非常に早く餌を捕獲するタイミングはほぼ完璧なタイミングで行われていると言える [28]。このように食虫植物はそれぞれ特殊な機能を持つことによって餌を捕獲し、栄養を取るによって生存している。

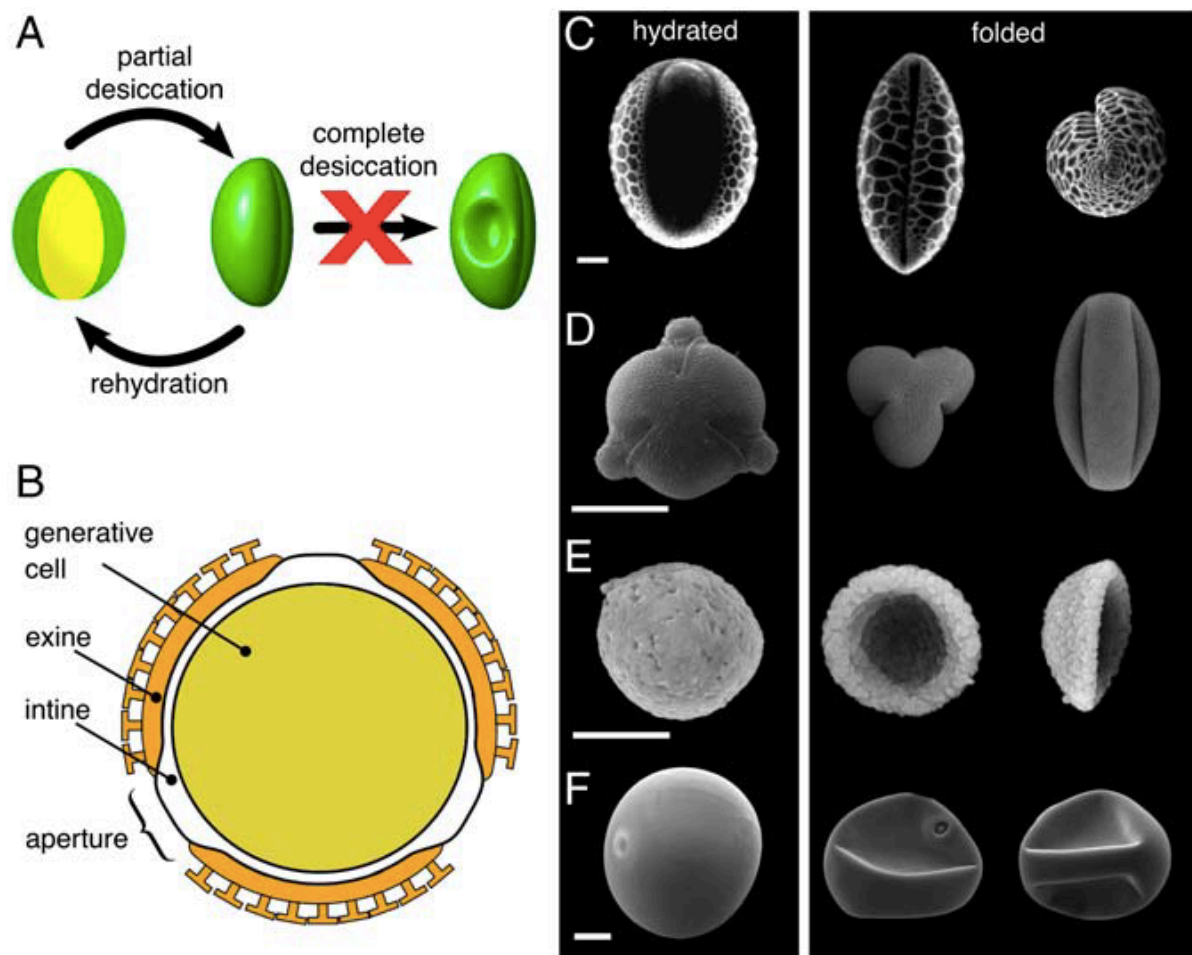


図 1.7. 花粉粒子が雄しべの葯から離れた後、脱水症状になり構造が変化した様子。A は花粉粒子が葯にいる状態から脱水症状を起こし harmomegathy の構造をとり、雌しべの柱頭にたどり着くと元の状態に戻ることを表した図。ここで乾燥した時にも凹んで座屈した状態にはならない。B は花粉粒子の複雑な構造を表している。C-F はさまざまな花粉粒子の葯にいるときの状態と、乾燥したときの状態である [29]。

被子植物の花粉は、雄しべの葯から離れると脱水状態になり構造が変化する [29]。この特徴的な構造は harmomegathy と呼ばれ [30]、乾燥によって細胞内の水分量が減少することによって引き起こされる。このときに花粉の壁は、驚くべきことに、自身の内部に入っていくという、特徴的な変形をする。無事に雌しべの柱頭にたどり着くことができると、花粉は乾燥状態から解放され、ふたたび水分を得た状態に戻る。花粉の表面には隙間が空いており、乾燥状態では、この隙間を閉じることによって水分の損失を防いでいる。またこの隙間は、周囲の環境との主要な接触面となっており、花粉管の到着点でもある。したがって

harmomegathy は相反する 2 つの要請：(図 1.7A)：

1. 花粉粒子と周囲の環境 (花粉管との接続) との接続のために隙間を開く必要性
2. 花粉の細胞の乾燥を制限するために隙間を閉じる必要性

に対する 1 つの回答になっている。

花粉の粒子は複雑な構造をしている (図 1.7B)。隙間の数や配置、形状は折りたたみの方向に影響を与える。乾燥状態に置くと、隙間はある方向に伸びるとともに狭くなっていき、やがて花粉粒子は閉じる (図 1.7C,D)。適切な隙間の存在は、折りたたみの貫入のガイドになっている。一方で隙間のない花粉粒子は乾燥に対して外膜が陥没する (図 1.7E,F)。

以上の様々な例から見られるように、薄い構造物というのは自然界や工業界に多く見られ、我々の周りに普遍的に存在する [31]。植物のかたちに関する研究では、葉や花の形を偏差成長を取り入れた、弾性体理論を用いて再現した研究や、葉っぱの形がどのように形成されるのかを、成長促進ホルモンの反応拡散を用いて説明した、生理学の文脈に寄り添った数理的なモデル研究 [32] も多数存在する。動植物の形状を工業製品などに応用する、バイオミメティックスの分野でも盛んに研究が行われており [33]、動植物の形を元に新しい製品を開発する流れもある。本研究においても、そのような精神にならって生物を理解しようと考えた。具体的な問題に取り組む前にまず、弾性体力学の基本的な説明を述べていく。

第 2 章

薄い構造物の力学

前章ではさまざまなもののかたちを紹介した。これらのかたちを評価するために、我々は弾性体力学と幾何学を用いる。3次元の弾性体力学は力学ができた初期の頃から調べられており、材料の力学的特性を調べるには有効な手段である [34]。しかし、棒やひもなどの1次元的な構造物や、板やシェルなどの2次元的な構造物を考えるには幾何学的な条件を考える必要がある。これらの構造物は、薄いという性質のために、小さなひずみで大きく変形することが可能である。この効果を適切に取り入れることで、これらの物質のふるまいを正しく理解することができる。まず、連続体力学の重要な概念である、ひずみと応力について考える。

2.1 応力とひずみ

2.1.1 ひずみ

ひずみは変形の割合を表す無次元量である。例えば、もともと長さ L の棒の長さが L' に変化したとする。この時のひずみは

$$\epsilon = \frac{L' - L}{L} \quad (2.1)$$

と表される。実際には、ひずみは物体の各点で定義される。物体の変形は一般には全体で一律でないからである。3次元的な物体でも長さの変化を元にひずみは計算される。物体の座標を \mathbf{r} で指定できるとする。ある座標の近傍の位置を $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ として、変形した時の2点間の相対的な位置の変化を記述することにより、ひずみは計算される。物体は全体が回転したり平行移動したりするような剛体的な運動では、ひずみは発生しない。

弾性体の変形を考える上で2つの近似の方法がある。1つめは微小変位近似である。これは物体がほとんど変形できないような場合を仮定している。これはものの硬さを測る時などには役に立つが、大きな変形までは記述できない。2つめは微小ひずみ近似である。こちらはひずみが小さい変形を仮定している。1、2次元的な構造物では剛体的な運動を含む大変

形が容易に引き起こされる。

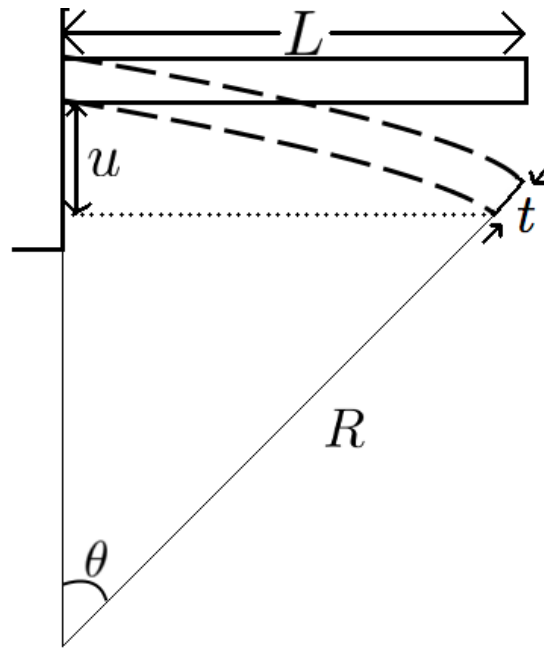


図 2.1. 棒の曲げ。変位は L^2/R に比例するが、ひずみは t/R に比例するので厚みが小さければひずみはいつも小さく保たれる。

例えば、図 2.1 のように重力下での棒の変形を考えると、二つの違いがはっきりとわかる。一端を固定された長さ L 、厚さ t の棒が曲率半径 R で曲がった時の変形を考えよう。

この時の物体の典型的な変位の大きさ u は

$$u = R(1 - \cos \theta) \approx \frac{R}{2}\theta^2 = \frac{L^2}{2R} \quad (2.2)$$

また物体の典型的なひずみ ϵ は、変形に際して物体が伸縮した長さに変形前の長さの比で表される。棒の上側では物体は伸長され、下側は圧縮される。したがって中間では伸長も圧縮も受けない線が存在する。その長さと変形後の上側の長さを比較すると、今回の変形での典型的な歪み ϵ は

$$\epsilon = \frac{(R + \frac{t}{2})\theta - R\theta}{R\theta} \approx \frac{t}{R} \quad (2.3)$$

となり、歪みはいつでも十分小さい*1。この例の場合、微小ひずみ近似はいつでも成り立っているが、微小変位近似は成り立っていない*2。このように線形弾性論と幾何学非線形性を取り入れた微小ひずみ近似を用いることで多くの問題に対処することができる。

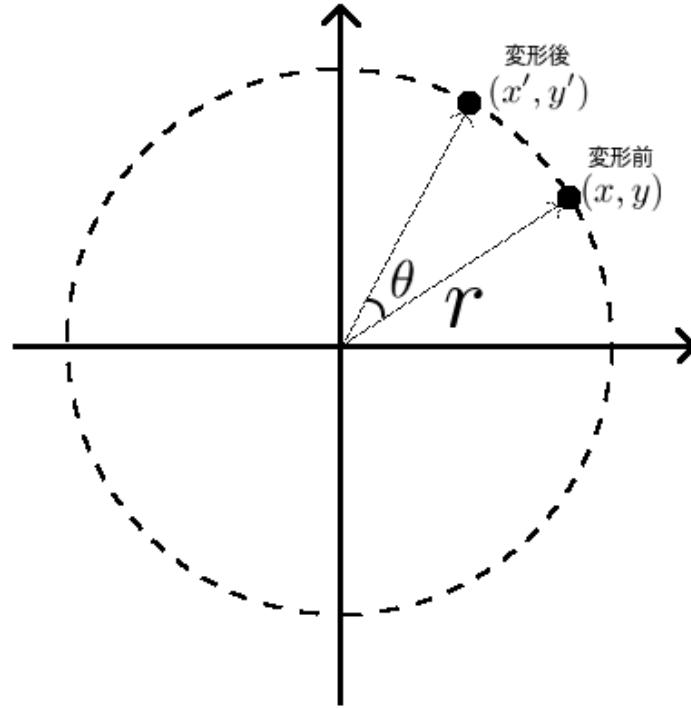


図 2.2. 物体の純粋な剛体回転。幾何学非線形性を考慮することでひずみは厳密に 0 となる。

2.1.2 幾何学非線形生：純粋な剛体回転

次に、微小変位の近似と微小ひずみの近似の違いをもう少しはっきりと理解するために図 2.2 のように、純粋な剛体回転を考えてみる。

変形前の位置を (x, y) とすると、変形後の位置は

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad y' = x \sin \theta + y \cos \theta \quad (2.4)$$

ここで、角度 θ は回転角である。また変位ベクトルは

$$u_x = -x(1 - \cos \theta) - y \sin \theta, \quad u_y = x \sin \theta - y(1 - \cos \theta), \quad (2.5)$$

となる。ひずみを求めるためにまず変形テンソル (付録 A.4) を計算する：

$$E_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -(1 - \cos \theta), \quad E_{xy} = -\sin \theta, \quad E_{yx} = \sin \theta, \quad E_{yy} = -(1 - \cos \theta) \quad (2.6)$$

まとめて書くと

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -(1 - \cos \theta) & -\sin \theta \\ \sin \theta & -(1 - \cos \theta) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

*1 曲率半径 R が t 程度のオーダーになってしまうと、物体は折れ目がつくぐらい曲がらないといけない。

*2 変位は L の 2 乗で増加する。微小変位が成り立つのは θ が十分小さい時だけである。

を得る。線形化したひずみテンソルは

$$\epsilon_{ij}^L = \frac{1}{2} (E_{ij} + E_{ji}) = \begin{pmatrix} -(1 - \cos \theta) & 0 \\ 0 & -(1 - \cos \theta) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

となる。 $\theta \ll 1$ として展開すると

$$\epsilon_{ij}^L = \begin{pmatrix} -\theta^2/2 & 0 \\ 0 & -\theta^2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\theta^2), \quad (2.9)$$

となる。 $\theta \ll 1$ という近似は微小変位近似を意味している。これから線形化されたひずみテンソルはたしかにゼロになっている。しかし純粋な剛体回転を考えているので、歪みテンソルの成分は近似なしですべてゼロにならない。 $\theta \ll 1$ の近似をせずに考えてみよう。ひずみテンソルの非線形項は

$$\begin{aligned} E_{ij}E_{ik} &= \begin{pmatrix} E_{xx}^2 + E_{xy}^2 & E_{xx}E_{xy} + E_{yx}E_{yy} \\ E_{xy}E_{xx} + E_{yy}E_{yx} & E_{yx}^2 + E_{yy}^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & (1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(1 - \cos \theta) & 0 \\ 0 & 2(1 - \cos \theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

となるので、ひずみテンソルは

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^L + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(1 - \cos \theta) & 0 \\ 0 & 2(1 - \cos \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

となり、非線形項を考慮すると厳密にゼロとなる。つまり剛体回転を伴う変形を扱う場合（薄膜やシェル）非線形項も取り扱わなければならない。

2.1.3 応力

応力は単位面積あたりにかかる力とその方向を表すテンソル量であり、単位は [Pa] である。

連続体に作用する力は 2 種類あり、

1. 体積力 (body force) $\mathbf{F}_b \sim \ell^3$
2. 面積力 (areal force) $\mathbf{F}_a \sim \ell^2$

である。ここで ℓ は物体の典型的な大きさである。体積力とは任意の内部領域全体に作用する力であり（重力、静電気力など）(図 2.3)、面積力とは物体内部において物体の各部分が互いに及ぼし合う力（内力）である。

応力は面積力を正しく定義する概念である。物体内部の微小な体積を考えた時、その表面を通じてやり取りされる運動量を考えることによって定義できる。

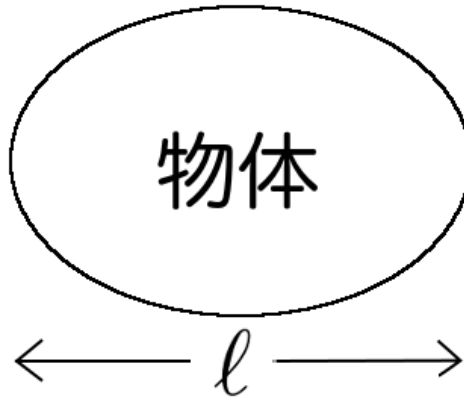


図 2.3. 長さ l 程度の大きさの物体。体積力は物体の外部から物体の各点に作用する力であり、物体の体積に比例している： $\mathbf{F}_b \sim l^3$ 。

2.1.4 応力とひずみの関係式

応力とひずみの関係は、「構成関係式」と呼ばれる。これは物体の詳細に依存して変化するが、ひずみが小さい場合には線形の関係で結ばれる。線形の構成関係式を用いた理論的な枠組みを、「線形弾性論」と呼ぶ。ひずみと応力の関係は

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.12)$$

と表すとき、その比例係数 E はヤング率と呼ぶ。ここで σ は応力である。ヤング率はひずみと応力の線形の関係式を繋げる物性定数である。これは線形バネにおけるフックの法則と同じ考え方である。実際にはこの関係式は物質の詳細に依存するが、ひずみが小さい場合 $\epsilon \ll 1$ 、ひずみと応力は線形の関係で結ぶことができる。

2.2 伸びと曲げのエネルギー

弾性体のエネルギーは次のように表記できる (付録 A.116)：

$$\mathcal{E}_{el} = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (2.13)$$

いま、薄い板を考える。板の中性面に沿って x 軸と y 軸、断面方向に z 軸をとる。板の表面では応力の成分はゼロであることを仮定すると、式 (2.14) は次のように書き直すことができる

$$\mathcal{E}_{el} = \int_V \sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} dV \sim E \int_{-t/2}^{t/2} \int \int (\epsilon_{\alpha\beta})^2 dz dx dy \quad (2.14)$$

ここで線形弾性体の理論では、応力とひずみはヤング率を用いて $\sigma \sim E\epsilon$ と表されることを利用した。一般に小さいひずみでは、応力とひずみの間の関係は線形に近似できる。線形弾性論ではポアソン比を含む係数は $\mathcal{O}(1)$ である。

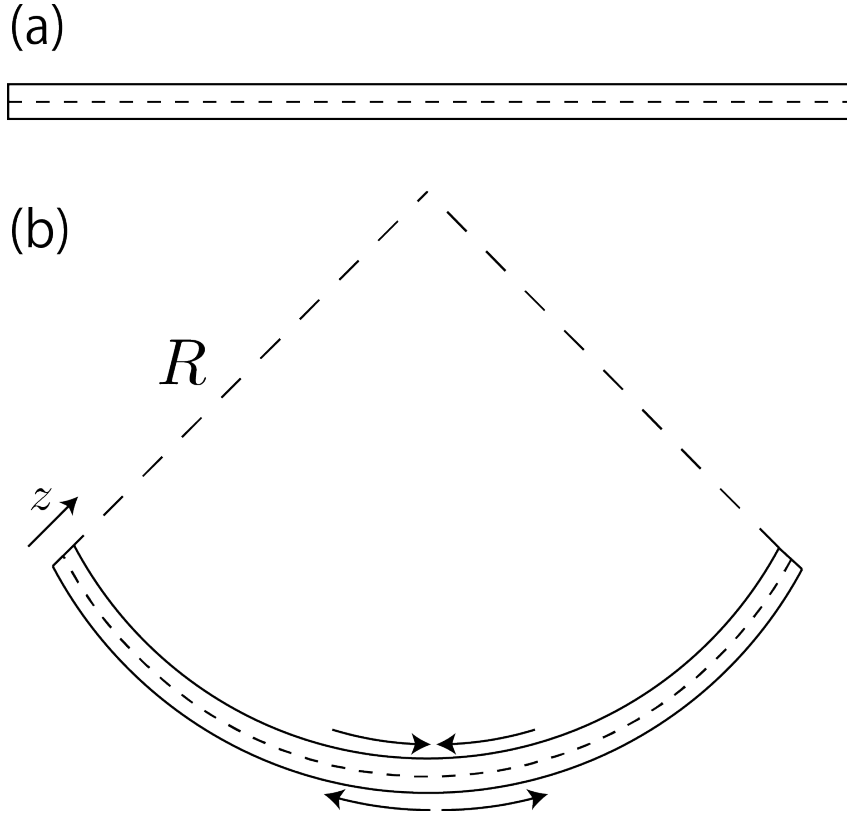


図 2.4. (a) 変形前の板。中心の破線は板の中性面を表している。(b) 曲率半径 R で一様に曲がった板。板の内側では圧縮が、板の外側では引っ張りがおきる。このとき中性面は伸び縮みをしない。

厚み t が他の 2 つの大きさよりも十分小さい時、厚み方向 z の依存性を無視するという単純化を行う。ここで $z = 0$ は中性面で $-t/2 < z < t/2$ である。この時の弾性エネルギーは純粋に 2 次元的な面の変形であり、membrane theory などと呼ばれる [1,2]。このときの弾性エネルギーは

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{mb} &= \frac{1}{2} \int \int_P dx dy t (\sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta})_{cs} \\ &\sim Et \int \int_P dx dy (\epsilon_{\alpha\beta})_{cs}^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

と計算することができる。ここで添え字の 'cs' は $z = 0$ の中性面を意味している。membrane theory では面の純 2 次元的な変形を考慮する。ここでのエネルギーは Et でヤング率 E と厚み t に比例する形になっている。このエネルギーは、中性面のひずみのみに依存するので、Gauss 曲率の発生しない isometry な変形^{*3}に対してはエネルギーは変化しない。円筒を平面に展開したり、円すい形にするような変形に対して、membrane theory はエネルギーの変化をもたらさない。このエネルギー的な縮退は現実には起こらない。実際は isometry な曲げ変形によって、板の厚み方向にひずみの分布が発生する。このひずみを評価することで、isometry な変形を区別することができる。

^{*3} isometry な変形は、計量が変わらない変形のことである。

板の中性面が曲率 $1/R$ である方向に曲がったとする。このとき、もう一つの方向には曲率 0 だとすると、板のガウス曲率は 0 のままである。幾何学的な曲面の変形ではこの状態は isometric な変形で、ガウス曲率の変化はなく、ひずみはゼロになる。しかし、実際の板は有限の厚みを持っている。今この板の厚みを t とすると、曲がった時に中性面よりも内側は圧縮され、外側は引っ張りを経験する (図 2.4)。中性面では圧縮も引っ張りも受けない。このことは中性面でのひずみは、やはりゼロであることを意味している。変形前後の板を比較すると、中性面に沿った長さは変化しないが、内側の端では $R - t/2$ 、外側の端では $R + t/2$ だけ z 方向の距離に比例して長さが変化する。つまり内側と外側は $\pm t/R$ だけ歪んでいる。このことから一般には、板の厚み方向に対してひずみが次のように表すことができる：

$$\epsilon \sim \frac{t}{R} \quad (2.16)$$

式 (2.14) に式 (2.16) を代入し、 z 方向の積分を実行すると、曲げエネルギーは

$$\mathcal{E}_b \sim \frac{1}{2} \int \int_P dx dy \frac{Et^3}{12} \left(\frac{1}{R_{cs}(x, y)} \right)^2, \quad (2.17)$$

と見積もることができる。ここで R_{cs} は中性面の曲率半径である。したがって曲げエネルギー密度は Et^3 と各点での曲率の 2 乗との積で求めることができる。

面内のひずみの変化は、ガウス曲率の変化を意味している。つまり、式 (2.15) は面内の圧縮や引っ張り変形にともなうエネルギーである。この伸びエネルギーと曲げエネルギーを比較すると、その係数はそれぞれ厚みの 1 乗と 3 乗に依存している。 t が十分小さい時、曲げのエネルギーは伸びエネルギー (式 (2.17)) と比較してかなり小さくなるので、変形はほとんど曲げだけで起こる。我々は日常的に、ポスターを円筒状に丸めたり、円すいをつくったりすることは簡単にできることを知っている。また球状のものをきれいにラッピングするのは非常に難しく、紙をくしゃくしゃに丸めたときのような線や点の欠陥ができる。伸びと曲げの相互作用は、いろいろな弾性板の問題に現れる重要な効果である。

2.3 オイラー座屈

この伸びと曲げのエネルギーコストの違いは、座屈現象という形で簡単に目にすることができる。下敷きの端を持ち、圧縮する方向に力を加えていくと、下敷きの初期状態はすぐに不安定化し、どちらかの方向にたわむ。この力学的な不安定性は発見者の名前にちなんでオイラー座屈 (Euler buckling) と呼ばれている。

このオイラー座屈についてもう少し詳しく見ていこう。我々はまず、棒を圧縮した時のエネルギーを考える。長さ L 、幅 W 、厚み t のストライプを考えよう。このストライプを長さ

方向に $\Delta (> 0)$ だけ押し込んだとする。この時のストライプのひずみは

$$\epsilon = \frac{\Delta}{L} \quad (2.18)$$

である。圧縮された時のエネルギーは単位体積あたりの変形エネルギー $E\epsilon^2$ に体積 LWh を乗じたものなので

$$\mathcal{E}_{\text{stretch}} \sim E\epsilon^2 LWt \sim E \frac{Wt}{L} \Delta^2 \quad (2.19)$$

となる。このときのエネルギーは Δ^2 に比例しているので、バネのように振舞うことがわかる。

次に棒が不安定化し、上下どちらかの方向に座屈して曲がった時の変形のエネルギーを考える。棒が全体で一様にまがり、そのときの曲率半径が R だとする。このとき、圧縮している点の間の距離は $L - \Delta$ のままだが、曲がったストライプの長さは元の長さ L に戻る。この曲げにより、ストライプ全体でひずみは $\epsilon \sim t/R$ 程度になる。ここから座屈により曲げ変形が起こったストライプの変形エネルギーは

$$\mathcal{E}_{\text{bend}} \sim E\epsilon^2 LWt \sim E \frac{LWt^3}{R^2} \quad (2.20)$$

となる。一方、幾何学的な議論から $\Delta \sim L^3/24R^2$ の関係があることが示せるので、エネルギーは

$$\mathcal{E}_{\text{bend}} \sim E \frac{Wt^3}{L^2} \Delta \quad (2.21)$$

と表すことができる。

この2つのエネルギーを比較することで、棒が圧縮方向の変形よりも曲げ方向の変形を好み、座屈しやすいことが理解できる。上で示した2つのエネルギーはともに Δ により変化する。より低いエネルギーの状態が選ばれるので、圧縮を受ける状態が安定なのは $\mathcal{E}_{\text{stretch}} < \mathcal{E}_{\text{bend}}$ の時である。式 (2.19) と (2.21) をそれぞれ代入すると $\Delta < \frac{t^2}{L}$ の時あるいは

$$\epsilon = \frac{\Delta}{L} < \left(\frac{t}{L}\right)^2 \quad (2.22)$$

が実現されている時に、圧縮の状態が現れることがわかる。通常の紙であれば $(t/L)^2$ の値は非常に小さい値になっており、ほとんど圧縮される変形は起こらずに座屈が起こることがわかる。もし厚みと長さの比が十分小さい $t/L \rightarrow 0$ のような極限では、完全に曲げのみの変形になることを示唆している。

上記の議論からわかるように、紙のように非常に薄い物質はほとんど曲げ変形しか起こさないことがわかる。紙は簡単に自重で曲がるが、一方で引っ張るとほとんど変形せず、非常に硬い物質であることが実感できる。では紙をくしゃくしゃに丸めた時はどうなるだろう

か。今度は紙は自重を支えることができる。くしゃくしゃに丸めた紙は、線や点のような特異的な構造を作り、その周りだけに変形が局在化する。このような構造をとる結果として、さらなる変形に対しては伸び変形を伴う。したがって、丸めた紙は大きな質量を支えることができる。このくしゃくしゃに丸めた紙については次の章で議論する。

2.4 折り目の力学

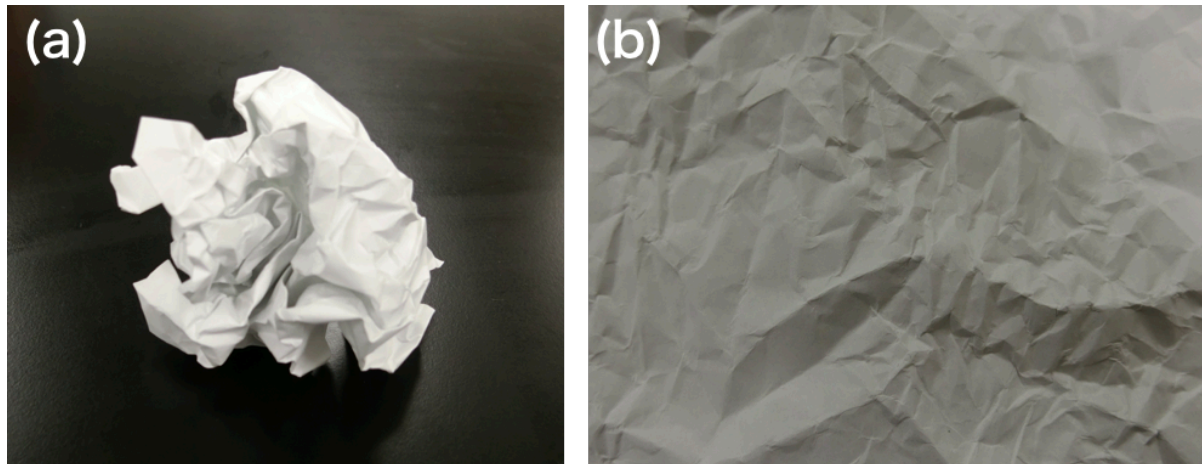


図 2.5. (a) 丸めた紙。 (b) 丸めた紙を開いた時の紙の一部の写真。

先ほどのものべたように、紙を丸めると自重を支えることができる。紙やシート状のものを丸めると、角ができる (図 2.5(a))。その紙を広げると、たくさんの鋭く尖った角と、それを繋ぐ線ができていることがわかる (図 2.5(b))。これらの角と線は複雑な多角形パターンを形成する。これは紙を丸めた時、紙の表面に応力が集中する箇所が存在し、そこで物質の弾性限界を超えた時、その点は永久ひずみとして残る。これらの点は広げた時に跡として残り、確認することができる。この特徴的な構造は、クラッシュした車のボディの変形などでも見るすることができる。

このような応力が局在化する現象は、1次元の棒やひものような物質では見るできない。2次元のシート状のものを狭い空間に制限すると、自発的にこのような局在構造を形成する。一方で、1次元状のものを狭い空間に制限したとしても、それらは一様に曲がろうとし、紙に見られるような鋭い構造を作ることはない。

これらの現象は、自発的に局在構造を作る例として詳しく研究されている [35–37]。通常は1次元物質のように最大限エネルギーを空間的に分布させ、一様に変形しようとする。この性質を理解するには、板やシェルのような2次元的な物質がもつ幾何学的な役割と力学との相互作用を知ることが重要である [38]。特に重要な概念として、幾何学的な定理のガウスの大定理が知られている [1]。これについては後述する。

2.4.1 d-cone

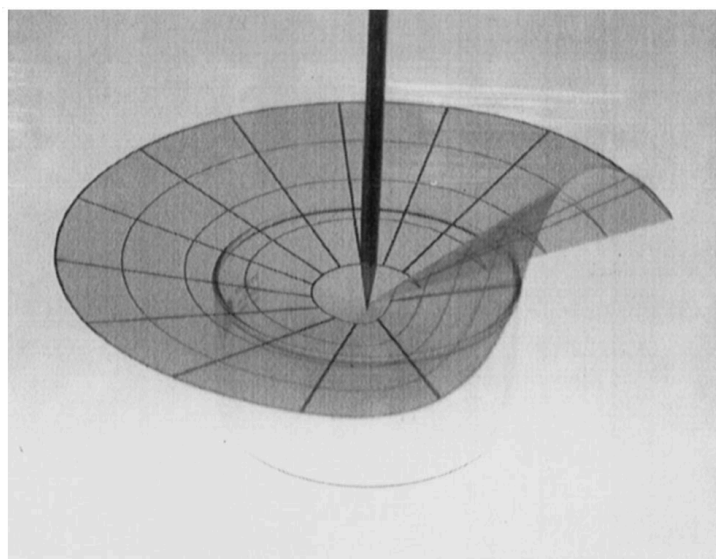


図 2.6. 円筒状の容器の上に平坦な薄い円盤を置いて、真ん中をペンなどの先の鋭いもので突いたときの様子。中央を押し込むと、円盤の一部が面外へと飛び出る。このとき中央で押し込んでいる付近以外では、曲げのみで変形が起こる。この構造は d-cone と呼ばれ、conical singularity として知られている [37]。

紙を丸めた時に起きる応力集中の構造は、展開可能なコーン (d-cone) と ridge という特異的な構造によって特徴付けられている [1]。d-cone は円錐形の特異点として詳しく調べられており [37]、平坦な板を円筒状の容器の上におき、その円筒中心を鋭く尖ったもので押し込むことで得られる形状をしている。押し込んだ時、板は円筒容器と接触したままの部分と、浮き上がり円筒容器から離れる部分を形成する (図 2.7)。この時、押し込んだ点の周辺をのぞいて、板はガウス曲率がゼロのまま変化しない展開可能な変形をする。この変形を isometric な変形と呼び、このとき平面内では伸び縮みが起きない。先端以外の面では曲げ変形のみが起こり、この曲げエネルギーを最小化するような形状が選択される。一方で、先端は有限のガウス曲率を形成する。この部分では、面は伸び縮みをしなければならない。よってこの先端付近では曲げと伸びのエネルギーを最小化するような形状になる。

2.4.2 Ridge 特異点

紙を丸めた時に、角を結ぶように線状の跡が形成される。2つの角とそれを結ぶ1つの線に注目すると、これは一枚の紙を2つ折りにした時の構造とよく似ている。紙を2つ折りにしたときは、折れ目を境に平坦な面が結合される。もし厚みに比べておおきな曲率半径の円筒状に紙を丸めると、isometric な変形を起し紙は元に戻る。このときガウス曲率はゼロのままで、曲げエネルギーのみが蓄積される。この曲率半径をゼロに近づけていくと、弾性

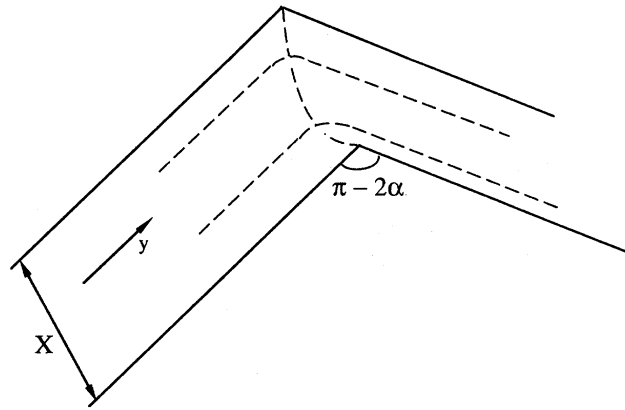


図 2.7. 幅 X の長い弾性ストライプを、境界で鋭い角度で折り曲げたときの変形の様子。 y 方向に境界の折れ目に沿うように曲がる一方で、断面方向には反対の符号の曲率を作る。破線は曲面に沿って描いたもので、断面方向の破線は ridge の頂上を表している。このような構造はその形から ridge singularity と呼ばれる [39]。

板には無限の曲げエネルギーが蓄積されることになる。実際にはそのようなことは起こらずに、この折れ目の曲率半径は板の厚みに依存しており、板の厚みがゼロに向かう極限でゼロに向かうように振舞う [35]。有限の厚みの弾性シートでは、折れ目は有限の曲率半径を持って曲がり、弾性限界を超えともはや元の形状には戻れなくなる。このような折れ目の構造は ridge と呼ばれる。ridge 構造は 2 点の鋭く折れ曲がった角を繋ぐ直線的な構造であり、そこでは板は 2 方向に曲率が発生する。このことはガウス曲率が生まれることを意味しており、面内は伸縮を伴う変形をする。ridge 構造はこの伸びエネルギーと曲げエネルギーのバランスによって特徴付けられる。

丸めた紙の変形はこの 2 つの特異的な構造によって特徴付けられる。このように紙を丸めるだけという簡単な実験から、複雑な局在構造が生まれ、その現象を理解するには面内の伸びと曲げの変形の関係が非常に重要であることがわかる。次の章では曲面の伸びエネルギーに直接的に関係しているいくつかの幾何学概念を説明し、ガウスの大定理が面内の伸び変形を考える上で不可欠であることを述べる。

2.5 ガウスの大定理

この章では、薄い弾性体における曲面の変形において重要な幾何学的な量である曲率について述べ、ガウスの大定理について説明する。

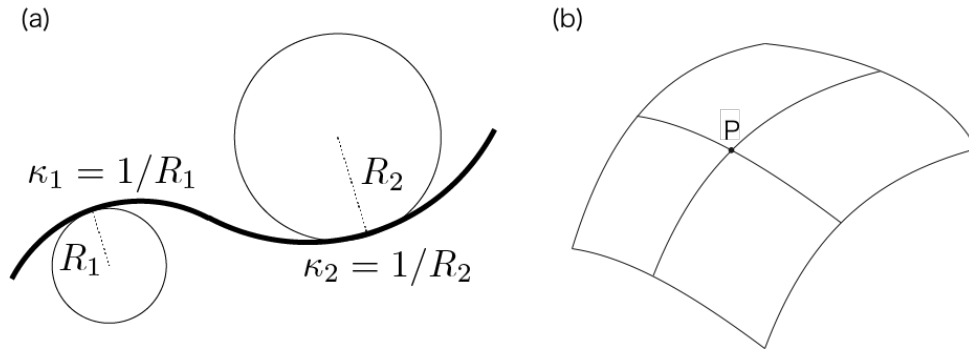


図 2.8. (a) 空間曲線に沿って、ぴったりとあう円の半径が、その点での曲率半径に相当する。(b) 曲線のある点 P を通るような曲線を引き、最大と最小のものがその点の主曲率となる。

2.5.1 曲率

曲率は、曲線の曲がり具合を表す幾何学量である。ある曲線に沿って、接線ベクトルが単位長さあたりにどの程度向きを変化させるかが、その場所における曲率 κ になる。ちょうど、曲線に沿ってぴったりとあう円を描いた時の、円の半径がその地点での曲率半径 $R = 1/\kappa$ に対応する (図 2.8(a))。したがって、曲率は $1/\text{長さ}$ の次元を持つ。まっすぐな線では曲率は $\kappa = 0 (R = \infty)$ となり、また角のようなところは曲率 $\kappa = \infty (R = 0)$ となる。3次元の曲線に対しては曲率は各点で1つに決めることができる。一方で、曲面に対しては、曲面上のある点において2つの曲率が存在する。曲面に対しても曲率の測定の仕方は変化しない。曲面上に適当な曲線を描き、それに沿った曲率を測定する。曲面上のある点において、その点を通るさまざまな曲線を描き、曲率を測定すると、その点で測定できる曲率の中で最大と最小の曲率の値をとる曲線を求めることができる。その最大と最小の曲率を κ_1, κ_2 と呼び、それらを与える方向を主曲率方向と呼ぶ (図 2.8(b))。

2.5.2 ガウス曲率

主曲率 κ_1 と κ_2 の平均の値を平均曲率と呼ぶ：

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \quad (2.23)$$

また主曲率の積はガウス曲率と呼ばれる：

$$\kappa_G = \kappa_1 \kappa_2 \quad (2.24)$$

平均曲率は曲率と同じ $1/\text{長さ}$ の次元を持ち、ガウス曲率は $1/(\text{長さ})^2$ の次元を持つ。すべての曲面はガウス曲率によって次の3つに分類できる (図 2.9)：

(a) $\kappa_G > 0$ の曲面は楕円的曲面 (elliptic surface) とよばれる。主曲率の値が両方ともに正の値、または負の値をもつ場合はこの曲面に分類される。球殻や卵の殻などもこのタイプ

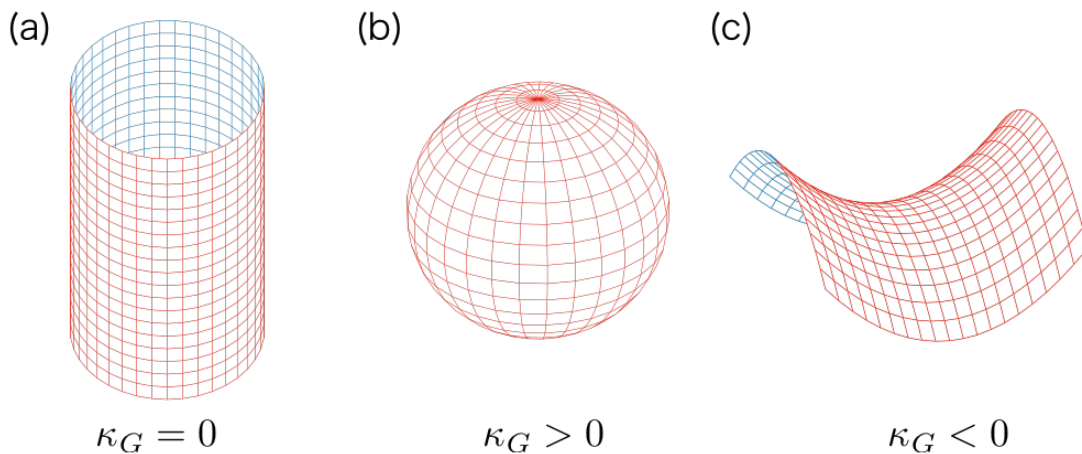


図 2.9. ガウス曲率による曲面は 3 つに分類される。(a) ガウス曲率がゼロ ($\kappa_G = 0$) の円筒の曲面。円すいや平坦な面も同じ曲面に分類される。(b) ガウス曲率が正 ($\kappa_G > 0$) の球面。(c) ガウス曲率が負 ($\kappa_G < 0$) のクラ型の曲面。

の曲面に分類される。主曲率は共に同じ符号を持つので、曲面は上に凸または下に凸形状をしている。このタイプの曲面の平均曲率は常に正か負の値を持つ。

(b) $\kappa_G < 0$ の曲面は双曲的曲面 (hyperbolic surface) とよばれる。主曲率はそれぞれ正と負の反対の符号の値を持つ。馬の鞍のようなタイプの曲面である。また特別な場合として、平均曲率がゼロであるような曲面 $H = \kappa_1 + \kappa_2 = 0$ (極小曲面) は双曲的曲面である。

(c) $\kappa_G = 0$ の曲面は放物的曲面 (parabolic surface) とよばれる。2 つの主曲率のうち 1 つまたは両方がゼロの曲面。両方がゼロの曲面はその点では平面である。放物型の曲面上では必ず曲率がゼロの方向を見つけることができる。その方向と直行する方向が曲率の最大値をもつ方向である。またその方向を平面に展開することによって、面内の圧縮を伴うことなく曲面を平坦な面に展開することができる。このような曲面を可展面 (developable surface) と呼ぶ。例えばガウス曲率ゼロの曲面は、円筒や円すいなどである。

2.5.3 ガウスの大定理

ガウス曲率がゼロの円筒表面、例えばポスターなどを平坦に展開することは容易にできる。しかしガウス曲率が有限のもの、例えばみかんの皮を平面に展開しようと思うとうまくいかず、面をむりやり押し付けて引き延ばすしかない (図 2.10(a))。これは地球を平面の地図に展開したものでも同じことが言える。メルカトル図法では赤道付近はほとんど歪まなくていいが、極付近は大きく引き延ばされている。そのことで地球上の面積は正しく表現することができていない (図 2.10(b))。このことはガウス曲率が変化すると、面内の引っ張りや

(a)



(b)

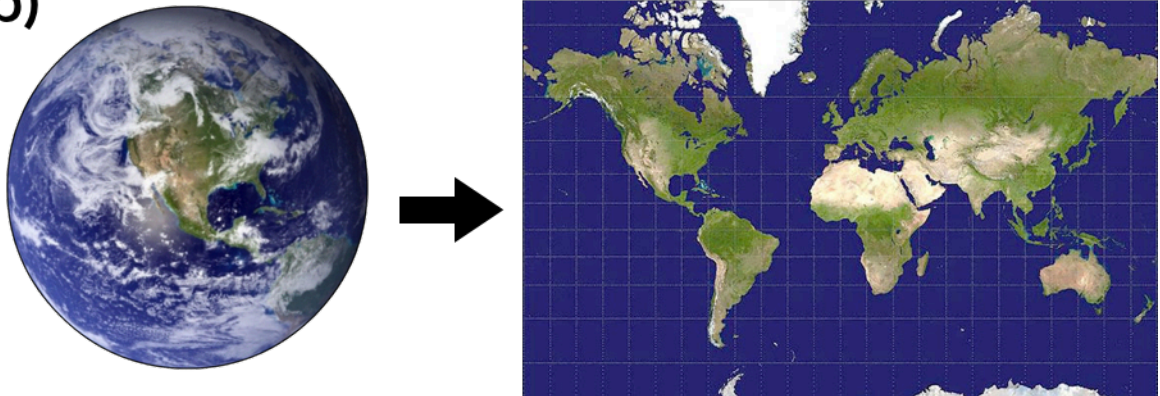


図 2.10. (a) 地球をメルカトル図法で表した地図。曲付近と赤道付近では曲面上のひずみが大きく異なる。(b) みかんの皮をむいた様子。みかんの皮は平面に展開することはできない。これら二つの例はガウス曲率の変化が面内のひずみと直接的に繋がっていることを表している。これはガウスの大定理と呼ばれる。

圧縮は避けることができないことを意味している。

2.5.4 計量

計量は面内の状態を教えてくれる。例えばシートを引き裂くことによって、幾何学的な形状の変化を引き起こすことができる。この簡単な実験によって、計量の変化がガウス曲率を生成し、座屈を引き起こすことを示すことができる。シートを実際に引き裂くと図 2.11 のようなパターンが得られる。プラスチック性のシートを引き裂くと、亀裂の先端付近で面が張力を受け引き延ばされる。やがてシートの伸びが限界に達すると亀裂面が進展する。このときシートは、もとの形状に戻らずに元の長さよりも伸びた状態で保存される。引き裂かれた部分では一番伸びているが、その少し内側では伸び率は少し減少する。このシートの伸び率は引き裂かれた面に垂直な方向に減衰していき、やがて元の形状と変化しないところにたどり着く。このときの面内のある点とその近傍の点の相対的な距離は変化するが、それは計量テンソルと呼ばれる量で表現することができる。この量の変形前と変形後の変化を調べると、物体のひずみを知ることができる。変形前はユークリッドな配置だったとすると、計量



図 2.11. プラスチック性のシートを引き裂いた時の引き裂き面のパターン。引き裂かれた面は引き延ばされ塑性変形を起こしている。

テンソル $g_{\alpha\beta}$ は

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

と表される。引き裂きを行うと、亀裂の進む方向 (x 方向) に、進む方向とは垂直な成分の計量 g_{yy} が変化している。これは計量 g_{yy} が x 方向の依存性のみを持っていることを意味している： $g_{yy} = g_{yy}(x)$ 。

ガウスの大定理はガウス曲率が面内の計量のみで表すことができ、面外の情報を必要としないということである。その結果を利用すると、この時のガウス曲率は

$$\kappa_G = -\frac{1}{\sqrt{g_{yy}}} \frac{d^2}{dx^2} \sqrt{g_{yy}} \quad (2.26)$$

となる。

もし $\sqrt{g_{yy}}$ が凸形状に減衰する場合は、その 2 回微分は正になり、ガウス曲率は負にならなければならない。この結果より、曲面はいたるところでサドルのような形状にならなければならない。この要請を満足するために、曲面は座屈変形を起こす。

第3章

本研究の目的

3.1 幾何学的な剛性

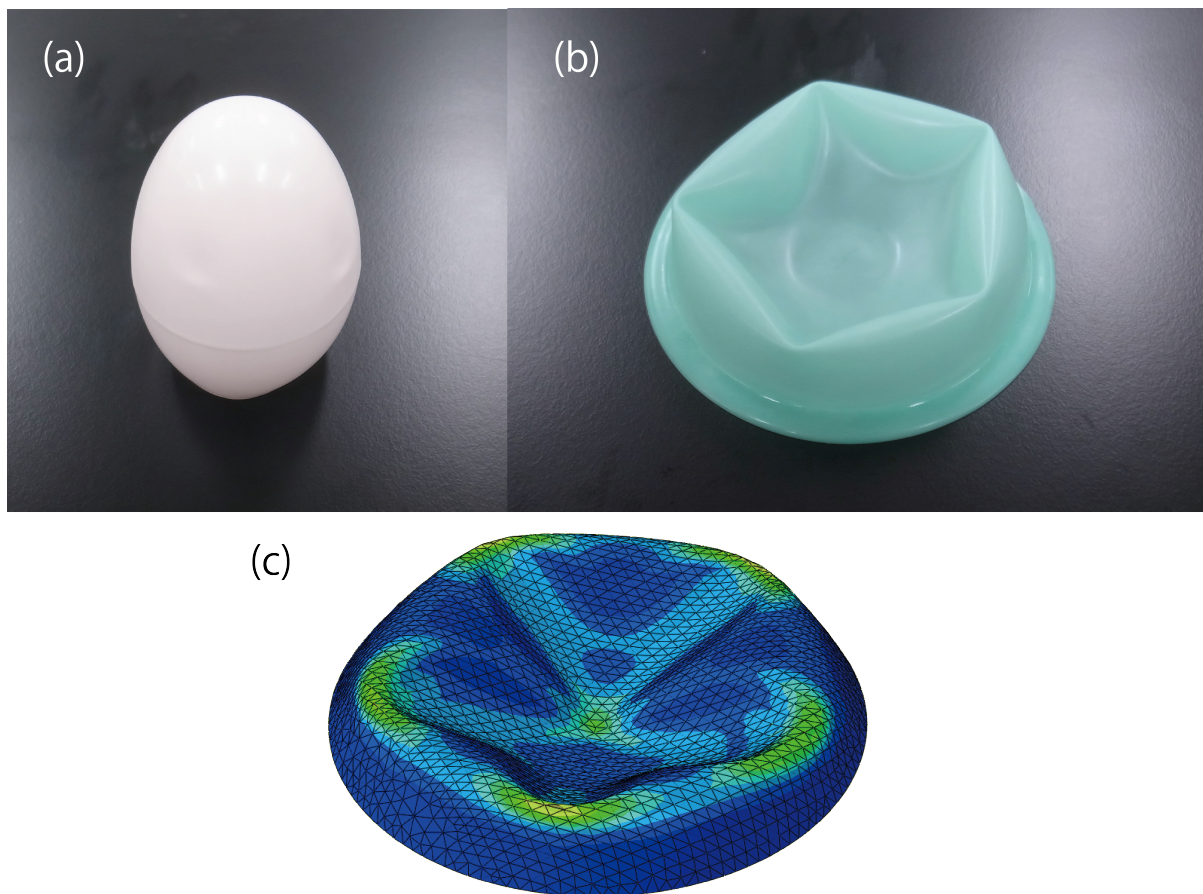


図 3.1. (a) たまご型のシェル。厚みは小さいが重力に逆らって、形状を保持している。(b) 半球シェルのインデントされた様子。中央部分の厚みが円状に大きくなっており、そこで重力の効果でインデントされている。インデントされたシェルは5角形のパターンを形成している。(c) 球形のシェルをAbaqusによる数値シミュレーションによってインデントを再現した様子。こちらも5角形のパターンを形成しており、実際のシェルとよく似たパターンが見られる。

ペットボトルの曲がった部分のように薄いプラスチックの半球を用意して、その極をつく。するとその幾何学に誘発された剛性を感じることができるだろう。それは幾何学と力学の相互作用によって作られ、固体力学の中心的な課題である [1–3, 35–38, 40–49]。これは 3 次元的な物質の応答とは大きく異なり、2 次元的な薄いシェルの変形では伸びと曲げの両方を巻き込んだ変形をするために見られる現象である (図 3.1)。伸びのエネルギーは薄い構造物の変形ではよりエネルギーを伴う変形である [38, 43, 50, 51]。対照的に、同じシェルのへりを挟んで見ると、シェルはより柔らかく、大きく変形することにすぐに気づくことができる。これはほとんど伸びない曲げ変形が支配的になっているからである。この簡単な観察から、自由境界を持つ開いたシェルは、十分に弱い変形でさえ曲げと伸びのバランスがストレスフリーな自由境界の存在によって変化させられることを示唆している。この特徴は完全な球や円筒では見ることができない [52–54]。

幾何学的な剛性に関する現象を 2 つ紹介する。1 つ目は半球状のシェルを板に押し付けたときの変形である。板で押し込む場合も、鋭いもので押し込むときと同様に、多角形のパターンを形成する [55]。この現象を、数値シミュレーションによって再現した様子を図 3.2 に示している。押し込み深さが小さい時 (図 3.2 上段) は、シェルは同心円上で板と接触する。ある押し込み深さを超えると、自発的に対称性が破れ、シェルは角を形成し、多角形のパターンを作る。図 3.2 の中段と下段は押し込み深さを変えた時のシェルの変形である。中段では 4 つの角を作るのに対し、さらに押し込んだ下段では 5 つの角を形成している。そして、それぞれ角を繋ぐような線が確認できる。また、4 つの角を繋ぐ線の内側では、凸状と凹状の曲面が向かい合って互い違いに現れる。一方で 5 つの角を繋ぐ線の内側では、全て凸状の曲面になっており、その内側で星型の凹状の曲面が現れる。

2 つ目は円筒形のシェルの中心を、点で押し込んだときの変形である。このとき、押し込み深さに依存して変形のパターンが変化する [56]。数値シミュレーションによって得られた変形を図 3.3 に示す。押し込み深さが小さいところでは (図 3.3 上段)、押し込む点を中心にシェルは 4 つの角を作りひし形に変形する。さらに押し込んで行くと、ひし形の軸方向の頂点は広がって行く (図 3.3 中段)。そして、軸方向の頂点がシェルの端に到達すると、軸方向にほぼ一様に変形する。このときシェルのガウス曲率はほぼゼロになっている。したがって 2.5 章で述べたように、面内のひずみは発生せず、曲げだけで変形が決定される、isometric な変形になっている。

本研究では開いた円筒形シェルの性質を調べる。開いた円筒シェルは弾性欠陥を作ることなく荷重に対して柔軟に変形することができる。したがって可逆的な大変形をすることができる。これとは対照的なものに、強く曲げたチューブの Brazier 不安定性 (座屈) がある [54]。Brazier 座屈はストローやホースを大きく曲げた時に観察することができる。この不安定性は、曲げに対して断面が楕円形に変形し、さらに曲げるとあるところで急激にヒン

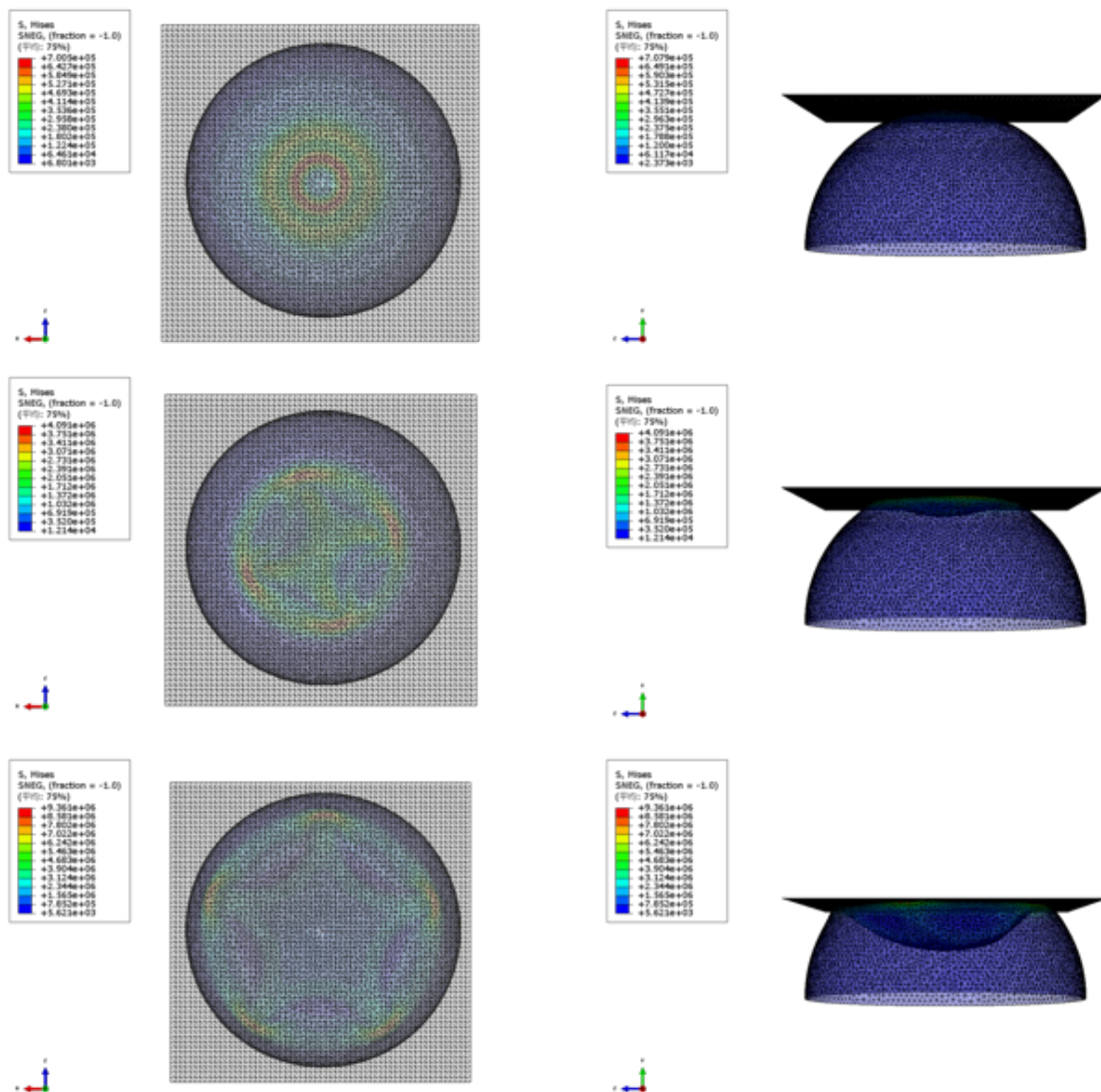


図 3.2. 板による球形シェルのインデント。変形しない剛体の板で球形シェルをインデントした時の様子。左側が上からの視点で、右側が横からの視点である。上から順に3段階のインデント深さのスナップショットを示している。一番上は押し込み深さが浅い領域で、球は円環状に板と接触し、軸対象な変形を起こしている。真ん中の押し込み深さでは対称性が破れ、円環状の接触が、4つの角での接触に変わっている。また4つの角を結ぶような線が走っている。また中央は凸状と凹状の曲面が向かい合って現れる構造になっている。さらにインデントが深くなると4つだった角は5つに分岐する。ここでは5つの辺に沿ってすべて凸状の変形しており、中央面は球形のキャップを鏡で反転したような凹形状になっている。

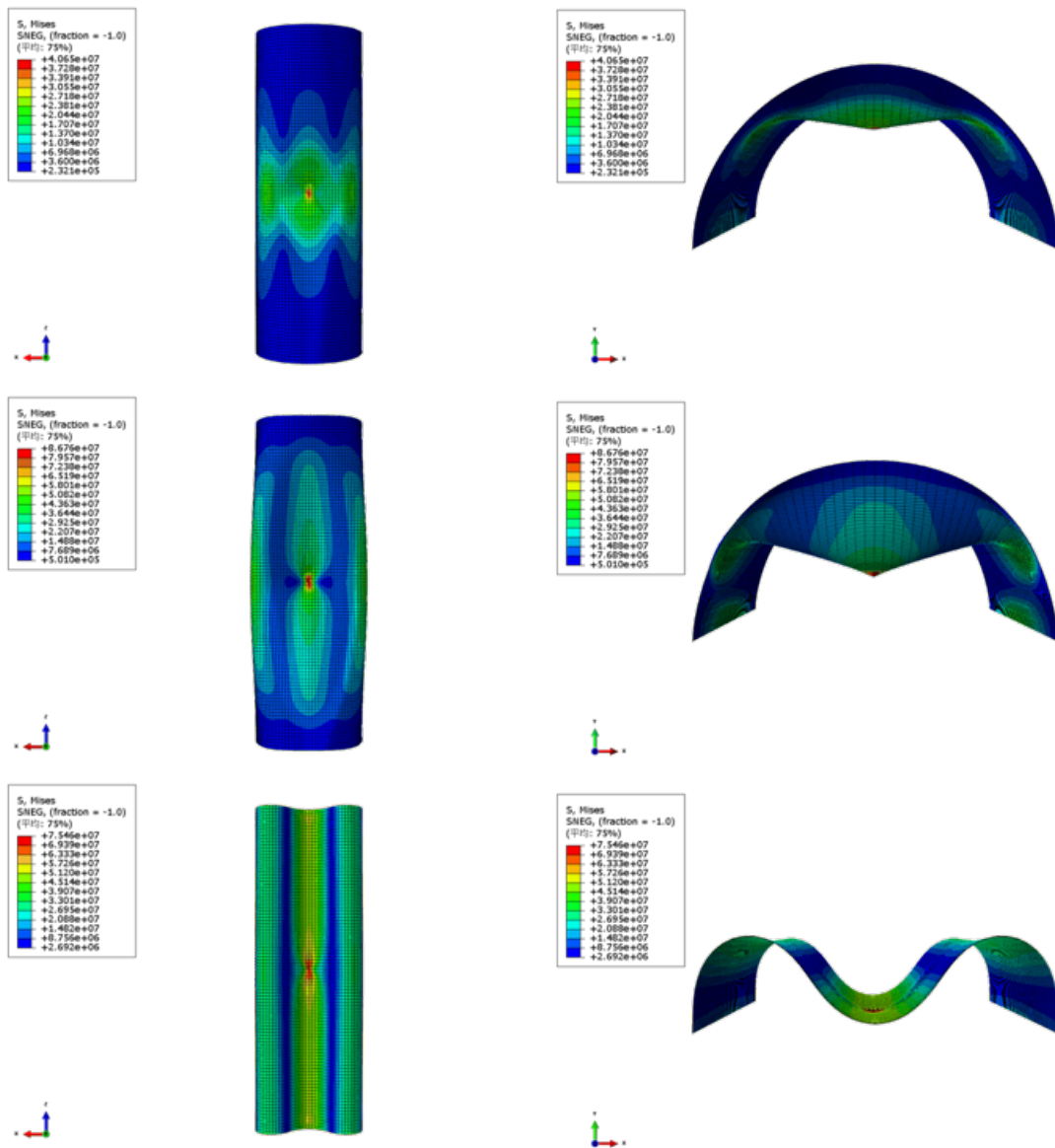


図 3.3. 半円筒をの中心を垂直に点でインデントした時の変形の様子。軸方向に沿った境界は完全に固定している。左側が上からの視点で、右側が横からの視点である。上から順に 3 段階のインデント深さのスナップショットを示している。一番上は押し込みが一番弱い時である。この時は円筒はインデントしたところからほぼ軸対象に変形している。真ん中はさらに押し込んで行った状態である。このときシェルは円筒の軸方向に変形が広がっている。さらに押し込んでいくと軸方向に広がって行った変位は端まで伝わり、周方向の変位は軸方向にほぼ一样になる。このときの形状は軸方向に曲率はほぼ発生しておらず、ガウス曲率はほぼゼロである。したがって isometric な変形でほぼ曲げだけの変形になっている。

ジのように振る舞う鋭い二つの欠陥の対が形成され、やがて崩壊していく。開いた円筒形シェルの可逆性は自然や人工物の様々なところで見ることができる。メジャーテープ [57] や窓のブラインド、単子葉類の植物 [58]、展開可能な昆虫の羽 [59] などである。構造力学や建築学ではこの自由境界はシェルの構造全体の安定性を高めるために利用される。これとは対照的に、幾何学的な剛性は近年活発に研究されており、その主な興味は小さな曲率や自由境界の相互作用である。

3.2 本論文での課題

前節で、幾何学的剛性が物理学における重要な問題であることを述べた。1章でも述べたように、建築物や工業製品だけでなく、生物のかたちも、幾何と力学の相互作用を利用した構造が多く存在する。本研究も植物のかたちから着想を得た。

植物は、一度発芽し根を生やしたところから移動することはできない。しかし植物は自身の体を大きく、様々なかたちに成長させることはできる。成長する中で、植物は様々なタイミングでそれぞれの器官に分化していく [60]。器官はそれぞれが何らかの特化した役割を持っていて、種によって色やかたち、大きさなどが異なる。現在我々が目にすることのできる植物は自然界の生存競争に打ち勝ち、環境の変化に適応、進化したものである。動物とは異なり動くことのできない植物は、捕食者や急激な環境の変化から逃れることができない。むしろ植物は自身の体を丈夫で壊れにくい構造に進化してきた。例えば、針葉樹の成長した茎は、直径が1-2m程度で中も密に詰まっている。背の高い樹木は、自重に耐えるためにも外的な刺激から自身を守るためにも、かなり頑強な構造が必要である。一方で、竹の茎などは中が中空になっているが、丈夫な構造として知られている [61]。これは竹が非常に早く成長するという性質を獲得するためにとった戦略と考えることもできる。植物の成長には光が必要である。そのため、植物は他の植物よりも多くの光を得るために、早く成長し高い位置に存在する必要がある。そのためには、丈夫でありながらもより少ない資源で成長する方が効率が良い。我々が目にしている植物の形状は、そのような要請の結果として考えることもできる。

これまで述べてきたように、植物の丈夫さを理解するには幾何形状が果たす役割を理解する必要がある。幾何学的な剛性は薄膜の弾性体の分野では中心的な課題である [1-3]。弾性体の歴史は17世紀から続く古い学問であるが、今尚新しい研究が生まれる活発な分野である。幾何学的な剛性は、工業製品では車のボディやロケット、メジャーテープ、建築物の屋根などに用いられており、自然界では植物の葉や昆虫の羽に用いられている [59, 62, 63]。この剛性は材料に依存しない剛性であり、限られた資源の中でより強固なものを作ろうとする中で自然に導かれた方法と考えることができる。

幾何学的な剛性は簡単なデモで示すことができる (図 3.4)。紙の端を地面と平行に持つ

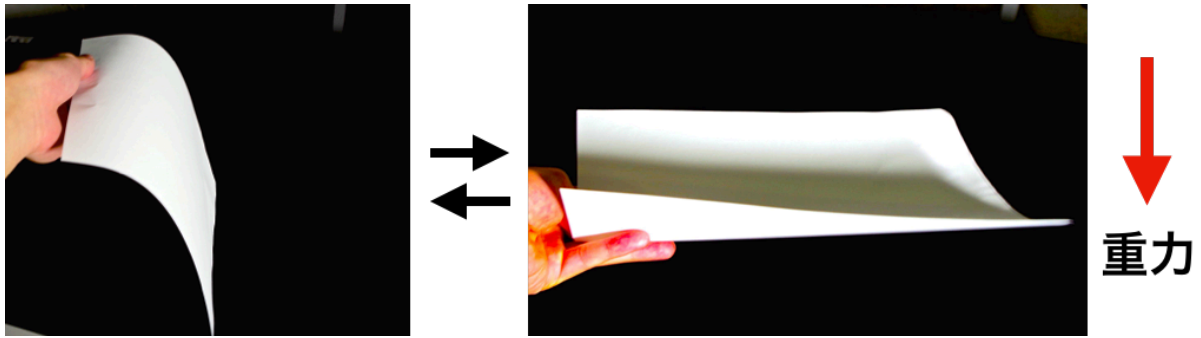


図 3.4. 重力に対して、自重を支えることができずに折れ曲がる紙 (左)。一端の断面方向に曲率をつけて持つと、重力によって折れ曲がることなく自重を支えることができる。

と、重力によって紙が垂直に下がる様子が観察される。紙のような薄い構造物がこのように変形することを我々は経験的にもよく知っている。紙を持っている端の部分で少し曲率がつくように持ってみると、様子は大きく変わる。紙は重力に逆らって自立することができるようになる。断面に曲率を持つことによって、材質に依存せずに幾何形状だけで剛性が変化していることになる。もしくは、弾性体に与える境界条件を変化させたことによって変形が大きく変化したとも言える [46,48]。

一般に、弾性体を変形させた時、変形を加えた箇所から離れるほど変形は小さくなっていく。変形を与えた箇所から変位が減衰していくまでの特徴的な長さを弾性体の変形の回復長と呼ぶ [47,48]。この変形の回復長が、変形の与え方や、弾性係数、形状などでどのように変化するかを次の章では詳しく調べる。この変形の回復長は構造の硬さを理解する上で重要になる。

本論文では主に円筒形状の弾性シェルを考えていく。曲率や自由境界 (stress-free boundary) などの幾何学的効果がシェルの変形や剛性にどのような影響を与えるのかを、理論と実験を組み合わせで調べてる。特に、円筒形シェルの回復長について詳しく調べる。これは副論文である、*Pinching an open cylindrical shell: Extended deformation and its persistence*, D. Matsumoto, T. G. Sano and H. Wada, *Europhysics Letters* **123** 14001 (2018) [64] でまとめられた内容であり、本論文ではより詳細まで記述する。

第 4 章

円筒形シェル

4.1 完全な円筒形シェル

4.1.1 Brazier 効果

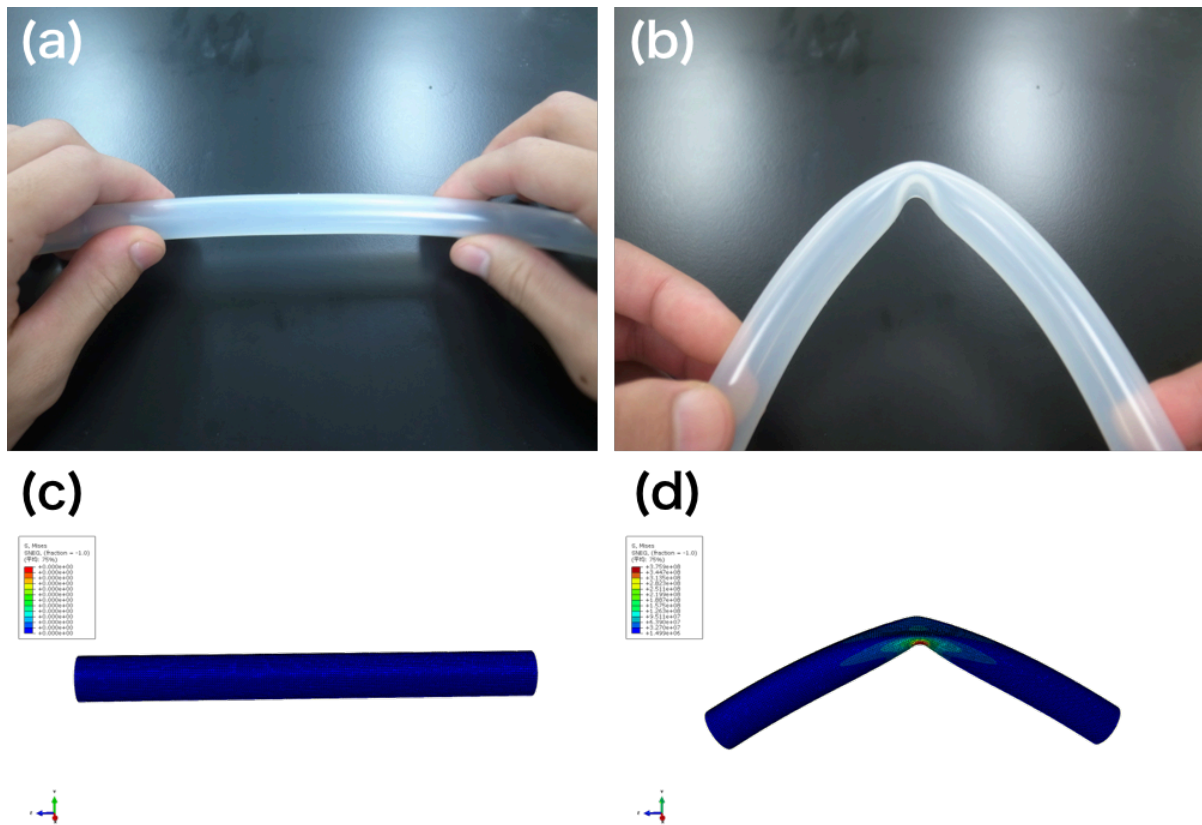


図 4.1. (a) 円筒状のチューブ。(b) 円筒状のチューブを折り曲げた時の変形。Brazier 不安定性が起こり曲げが局在化して特徴的な形状があらわれる。(c)Abaqus による円筒の数値計算モデル。(d) 数値計算で再現した Brazier 不安定性。カラーバーは von Mises 応力を表している。von Mises 応力は $\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2}\{(\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2\}}$ で定義されるスカラー量である。ここで σ_1, σ_2 は主応力である。von Mises 応力は応力と同じ次元を持ち、応力の大きさを表す量である。

円筒形状の構造物は、工業的にも自然界でも様々なところで観察される。円柱と比較して円筒は幾何学的な剛性は下がるものの、空洞の部分を物質の輸送に使ったり、より少ない材料で作ることができる点で便利である。長い円筒の端を持ち、徐々に曲げていくと、断面の形状が最初円形だったものが徐々に潰れて楕円形になっていく様子が観察できる (図 4.1)。そして、あるところで断面に欠陥の対ができ、それがヒンジのように働くようになる。もしくは曲げに伴う圧縮に耐えきれなくなり、物体が崩壊する。古典的な梁の理論による、線形のモーメントと曲率の関係によって、微小変位の近似における硬さは導かれていた。実験によって得られるモーメントと曲率の関係は、曲率の変化が非常に小さい時は、線形の理論とよく一致している。しかし、曲率の変化が大きくなるに従って線形のそれとは一致しなくなる。この関係性を最初に詳しく調べた研究は、Brazier によるものだった [54]。彼は古典的な梁の理論では扱わなかった断面の変形を考慮し、微小ひずみの近似によってモーメントと曲率の関係や崩壊が起こる臨界のモーメントを調べた。また曲げに伴う圧縮によって、円筒に lobe 型の不安定性が起こり、特徴的なパターンが発生している、と考察している。この曲げモーメントを加えることによって断面が、楕円形に変形することを、発見者の名前にちなんで Brazier 効果と呼ぶ。また、臨界モーメントを超えると、欠陥が生成され、局所的に曲がることから、Brazier 座屈と呼ばれることもある [65]。Euler 座屈は一次元的な構造物が圧縮力を受けた時の不安定性であったのに対して、こちらは曲げに伴い発生する楕円化と軸方向の圧縮力によって引き起こされる不安定性である。また、Blazier 不安定性は、局所的な座屈 (localized buckling) にいたる点でも、Euler 座屈とは本質的に異なる。

曲げに伴う楕円化の解析

ここでは Brazier による解析の流れを順を追ってみていくことにする。まず、円筒形シェルの全体の弾性変形エネルギー \mathcal{E}_{el} は次のようにかける：

$$\mathcal{E}_{el} = \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_c \quad (4.1)$$

ここで \mathcal{E}_s は円筒の長軸に沿ったひっぱりと圧縮のエネルギーであり、 \mathcal{E}_c は断面の曲げ変形によるエネルギーである。変形前の円筒の中心線の位置ベクトルは

$$\mathbf{r}_0 = a\hat{\mathbf{e}}_r \quad (4.2)$$

と表すことができる。

変位ベクトルは $\mathbf{u} - \mathbf{u}(\theta) = w\hat{\mathbf{e}}_r + v\hat{\mathbf{e}}_\theta + u\hat{\mathbf{e}}_z$ とすると、変形後の位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u} = (a + w)\hat{\mathbf{e}}_r + v\hat{\mathbf{e}}_\theta + u\hat{\mathbf{e}}_z \quad (4.3)$$

となる。

ここで

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{e}}_r \quad (4.4)$$

より、 θ 方向の接ベクトル \mathbf{t}_θ は

$$\mathbf{t}_\theta = \left(1 + \frac{w}{a} + \frac{1}{a}\partial_\theta v\right) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{a}(\partial_\theta w - v) \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{a}\partial_\theta u \hat{\mathbf{e}}_z \quad (4.5)$$

となるので、計量テンソル成分 $g_{\theta\theta}$ は

$$g_{\theta\theta} = \mathbf{t}_\theta \cdot \mathbf{t}_\theta = \left(1 + \frac{w}{a} + \frac{1}{a}\partial_\theta v\right)^2 + \frac{1}{a^2}(\partial_\theta w - v)^2 + \frac{1}{a^2}(\partial_\theta u)^2 \quad (4.6)$$

である。ここから、周方向のひずみは

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2}(g_{\theta\theta} - 1) \approx \frac{1}{a}(w + \partial_\theta v) + \mathcal{O}(w^2, v^2) \quad (4.7)$$

となるので、線形弾性論の範囲では

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{a}\left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \quad (4.8)$$

と近似できる。ここで「周方向に伸び縮みしない」という Brazier の仮定を課すと

$$w + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (4.9)$$

を得る。

次に伸びエネルギー \mathcal{E}_s を計算する。円筒の中心は曲率半径 R の円弧形に曲げられているとする。また断面の変形は一様に起きるとするので

$$\partial_z w = \partial_z v = 0 \quad (4.10)$$

を仮定する。 $\epsilon_{zz} = \frac{y}{R}$ より、単位長さあたりの変形エネルギーは

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{2} \int E \epsilon_{ss}^2 dA = \frac{E}{2R^2} \int y^2 dA \quad (4.11)$$

となる。ここで、シェルは十分薄いので $dA = t a d\theta$ である。

シェル (の中心面) の位置は

$$y = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = (a + w) \sin \theta + v \cos \theta \quad (4.12)$$

である。よって

$$\mathcal{E}_s = \frac{E}{2R^2} \int_0^{2\pi} ((a + w) \sin \theta + v \cos \theta)^2 a t d\theta \quad (4.13)$$

となる。ここで $w = w(\theta)$ は一般に

$$w(\theta) = w_0 + \sum_n A_n \cos(n\theta) + \sum_n B_n \sin(n\theta) \quad (4.14)$$

とフーリエ級数に展開できる。さて、曲げの面を挟んで断面の変形は上下対称であることを仮定すると、最低次のモードは $\cos(2\theta)$ である。そこで面外変形を

$$w(\theta) = \xi a \cos(2\theta) \quad (4.15)$$

と仮定する。ここで $\xi = \frac{A_2}{a} \ll 1$ は $w(\theta)$ の振幅である。式 (4.9) より

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -w = -\xi a \cos(2\theta) \rightarrow v(\theta) = v_0 - \frac{1}{2}\xi a \sin(2\theta) \quad (4.16)$$

である。 $v_0 \neq 0$ であると θ 方向に剛体回転するが、この自由度は考える必要がないので

$$v(\theta) = -\frac{1}{2}\xi a \sin(2\theta) \quad (4.17)$$

とおくことができる。式 (4.13) に代入すると

$$(a + w) \sin \theta + v \cos \theta = a \sin \theta - \xi a \sin^3 \theta \quad (4.18)$$

すなわち

$$\mathcal{E}_s = \frac{Ea^2}{2R^2} \int_0^{2\pi} (\sin \theta - \xi \sin^3 \theta)^2 d\theta. \quad (4.19)$$

を得る。ここで公式

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \quad (4.20)$$

を使うと、

$$\mathcal{E}_s = \frac{\pi E t a^3}{2R^2} \left(1 - \frac{3}{2}\xi + \frac{5}{8}\xi^2 \right) \quad (4.21)$$

となる。

つぎに、断面のまげ (円形からのズレ) によるエネルギー増分の計算を行う。式 (4.9) の条件のもとで2次元面で考える。 θ 方向の接線ベクトルは

$$\mathbf{t}_\theta = \frac{1}{a} (\partial_\theta w - v) \hat{\mathbf{e}}_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (4.22)$$

である。ここで

$$ds^2 = (\mathbf{t}_\theta \cdot \mathbf{t}_\theta) a^2 d\theta^2 = [(\partial_\theta w - v)^2 + a^2] d\theta^2 \equiv g a^2 d\theta^2 \quad (4.23)$$

とすると、単位接線ベクトル $\hat{\mathbf{t}}_\theta$ は

$$\hat{\mathbf{t}}_\theta = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{t}_\theta = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial_\theta w - v}{a} \hat{\mathbf{e}}_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta \right) \quad (4.24)$$

である。ここで $g = (\partial_\theta w - v)^2/a^2 + 1$ また式 (4.4) より、単位法線ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ は

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{\partial_\theta w - v}{a} \hat{\mathbf{e}}_\theta \right) \quad (4.25)$$

とわかる。

曲率 κ はフレネ・セレの式から

$$\begin{aligned}\kappa &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_\theta}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{1}{a} \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{1}{a} \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{t}_\theta \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{1}{a} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{g}} \right) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{t}_\theta + \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}_\theta}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{g} \frac{1}{a} \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}_\theta}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (4.26)$$

と書ける。ここで

$$\frac{\partial \mathbf{t}_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{a} (\partial_\theta^2 w - \partial_\theta v) \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{a} (\partial_\theta w - v) \hat{\mathbf{e}}_\theta - \hat{\mathbf{e}}_r \quad (4.27)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{g} \left[\left(-1 + \frac{\partial_\theta^2 w - \partial_\theta v}{a} \right) - \frac{1}{a^2} (\partial_\theta w - v)^2 \right] \quad (4.28)$$

なので

$$\kappa = \frac{1}{R} \frac{-1 + (\partial_\theta^2 w - \partial_\theta v) / a - (\partial_\theta w - v)^2 / a^2}{\left[1 + (\partial_\theta w - v)^2 / a \right]^{3/2}} \approx -\frac{1}{a} + \frac{\partial_\theta^2 w}{a^2} - \frac{\partial_\theta v}{a^2} + \mathcal{O}(2) \quad (4.29)$$

となる。再び式 (4.9) を使うと

$$\kappa = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (4.30)$$

となる。したがって、曲率の変化分は

$$\delta \kappa = \kappa - \left(-\frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (4.31)$$

である。ここで面外変形 w を $w = a\xi \cos(2\theta)$ という形に仮定する。ここで ξ は断面の変形率を表す。これより、曲率の変化分 $\delta \kappa$ は

$$\delta \kappa = \frac{1}{a^2} (-3a\xi) \cos(2\theta) \quad (4.32)$$

を得る。これより、断面の曲げ変形のエネルギー \mathcal{E}_c は

$$\mathcal{E}_c = \frac{Et^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi a} \kappa^2 ds = \frac{Et^3}{24(1-\nu^2)} \frac{(3a\xi)^2}{a^4} a \int_0^{2\pi} \cos^2(2\theta) d\theta = \frac{3\pi Et^3}{8(1-\nu^2)} \frac{\xi^2}{a} \quad (4.33)$$

とあらわすことができる。式 (4.1) に戻って、系全体の変形のエネルギーは

$$\mathcal{E}_{\text{el}} = \frac{\pi Eta^3}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{3}{2}\xi + \frac{5}{8}\xi^2 \right) + \frac{3}{4} \frac{t^2}{a^2} \frac{\xi^2}{a} \right] \quad (4.34)$$

と求めることができる。断面の変形率 ξ は $\partial \mathcal{E}_{\text{el}} / \partial \xi = 0$ から決まるので

$$\frac{3}{2} \left(\frac{a}{R} \right)^2 = \left[\frac{5}{4} \left(\frac{a}{R} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{t}{a} \right)^2 \right] \xi \quad (4.35)$$

となる。ここで、我々は中心線のまげは十分小さく

$$\frac{a}{R} \ll \frac{t}{a} \quad (4.36)$$

つまり

$$a \ll \sqrt{Rt} \quad (4.37)$$

が成立するような領域にいるとする。このとき、式 (4.35) の左辺第 2 項、つまり式 (4.34) の $\frac{5}{8}\xi^2$ の項は無視できる。すると (4.35) より

$$\xi^* = \left(\frac{a}{t}\right)^2 \left(\frac{a}{R}\right)^2 \quad (4.38)$$

を得る。ここで、無次元化した曲率 φ を

$$\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{t} \frac{a}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a^2}{tR} \quad (\ll 1) \quad (4.39)$$

とおくと

$$\mathcal{E}_{el} = \mathcal{E}_{el}[\xi = \xi^*] = \frac{2\pi}{3} \frac{Et^3}{(1-\nu^2)a} (\varphi^2 - \varphi^4) \quad (4.40)$$

を得る。曲げモーメント M_{el} は $M_{el} = \partial\mathcal{E}_{el}/\partial\kappa$ より決まる。ここで $\kappa = 1/R$ より

$$d\kappa = d\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{t}{a^2} d\varphi \quad (4.41)$$

なので

$$M_{el} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \frac{Et^2a}{1-\nu^2} (\varphi - 2\varphi^3). \quad (4.42)$$

このモーメントと曲率の関係式は図 4.2 に示している曲線である。モーメントの最大値は

$$\frac{\partial M_{el}}{\partial\varphi} = 0 \rightarrow 1 - 6\varphi^2 = 0 \quad (4.43)$$

より、 $\varphi_c = 1/\sqrt{6} = 0.408$ のときモーメントは最大値になる。 φ の値を代入すると

$$M_{el}^* = M_{el}(\varphi_c) = 0.987 \frac{Et^2a}{1-\nu^2} \quad (4.44)$$

を得る。

φ は自発曲率半径 a と厚み t で無次元化した円筒の中心方向の曲率を表している。Brazier の解析によって得られたこのグラフは (図 4.2)、我々の式 (4.42) と同じ意味を持つ。曲率が増加すると徐々に曲げモーメントは線形の理論よりも低下することがわかる。これは曲率が増加するにつれて断面が楕円化し、曲げ剛性が低下するためである。そしてモーメントの値が最大値となる曲率を超えると、円筒形シェルは不安定化し、キックを形成する。

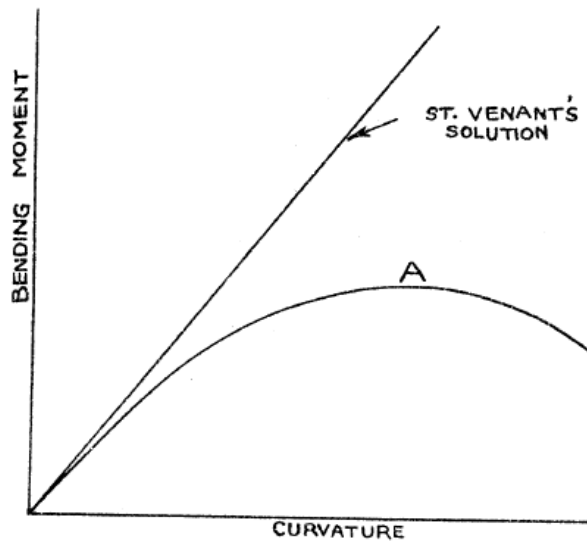


FIG. 1.

図 4.2. Brazier の行なった解析によって得られた、曲げモーメントと曲率の関係のグラフ。直線で描かれているのは、はりの理論で得られる関係式 (St. Venant の解)。非線形効果を取り入れた解析によって得られた曲線を見ると、モーメントは A の点でピークを迎える。A を超えるとパイプは不安定化し、キンクを形成する [54]。

4.2 開いた円筒形シェル

完全な円筒形シェルとは対照的に、開いた円筒形シェルは一旦折れ曲がっても、応力集中などの構造を作ることなく、もとの形に戻る可逆的な変形が可能である。メジャーテープなどをみればわかるように、一旦引き伸ばしたものを離れた時のダイナミクスも特徴的である [57,63]。自発曲率を持つ薄膜は、自然界では植物の葉 [58,66] や、昆虫の羽 [59]、工業製品ではロケットや車のボディ、メジャーテープ [62,67] など様々なところで普遍的に見られる。構造力学や建築学では、これらの自由境界はシェル全体の安定性を向上させるために固定されることが多い [2,31]。

植物の葉やメジャーテープなどは一旦折れ曲がっても壊れることはない。これらは物質が壊れると機能が失われてしまうため、壊れずにしなやかに変形できる性質をうまく利用している例であるといえる。この変形の可逆性は、閉じた円筒ではみられない。閉じた円筒シェルが大変形を起こすと、Brazier 不安定性で見たように、断面が楕円化し、さらに変形を加えると弾性欠陥を作り塑性変形を起こす。一方で、断面に曲率をもつ薄膜は平坦なものよりも明らかに大きな剛性をもっている。これは材料によらない、幾何学的な効果による剛性である。この剛性のおかげで葉やメジャーテープは重力に負けずに自重を支えることができる。

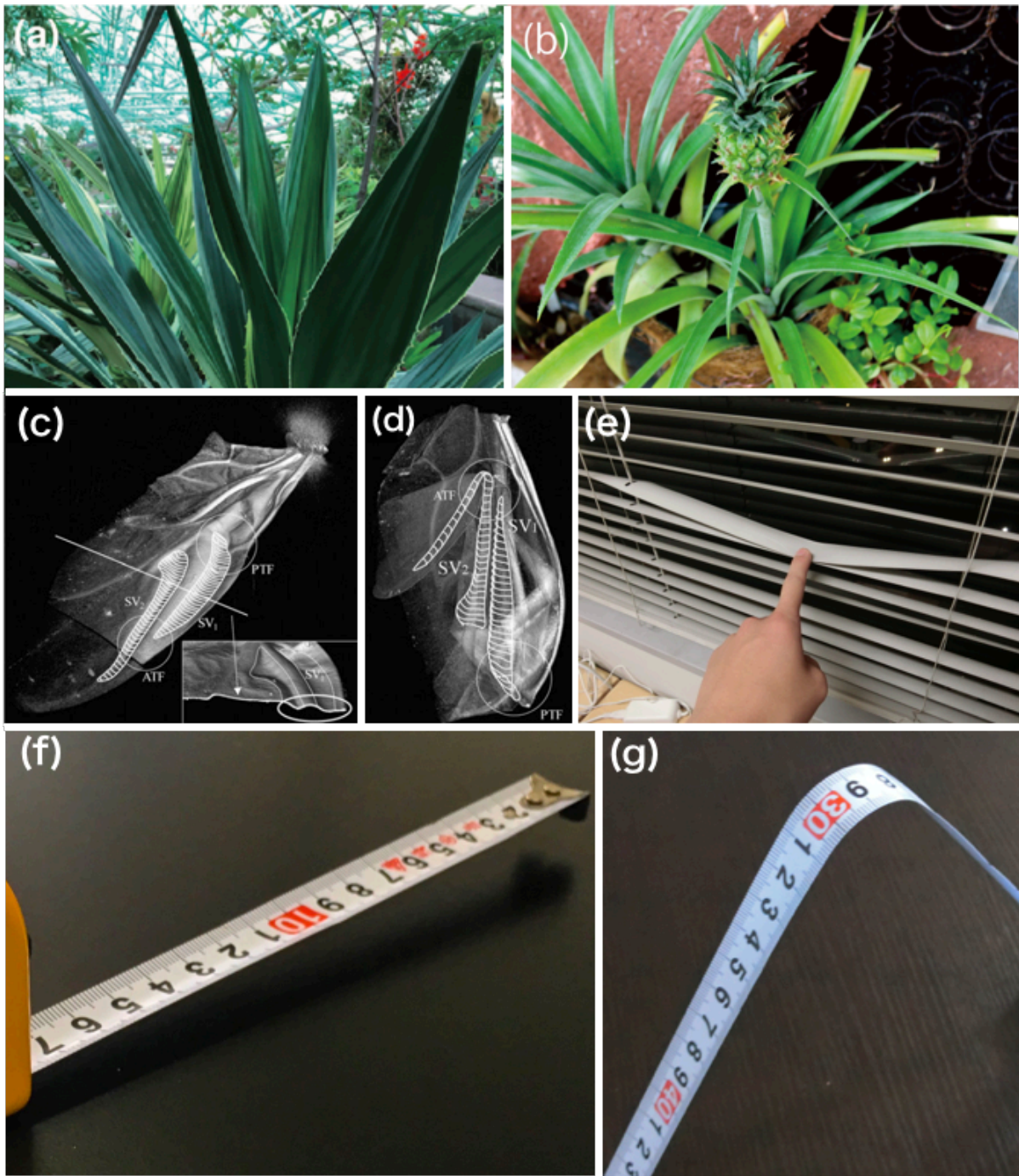


図 4.3. (a)(b) 断面に曲率のある植物の葉の例。パイナップルの葉。(c) てんとう虫の羽の中にあるシェル構造 [59](e) ブラインドも断面に曲率を持っている。ブラインドも荷重に対して、スナップ座屈を起こし、パキッという音と共に曲げを局在化させる。(f) 断面に曲率を持つメジャーテープ (g) メジャーテープが曲げを局在化させて変形する様子。

一般に弾性体のある場所に局所的な変形を加えた時、変形は力を加える場所から離れるにしたがって、徐々に減衰していき、十分遠くでは自然な形状を回復する。では「どの程度の距離はなれると元の形状を回復するか」という問いは弾性体の変形を考える上で基本的な問題である。この変形が減衰していき元の形状を回復する長さを、我々は変形の「回復長」(persistence length) と呼ぶ。

平坦な strip や閉じた円筒シェルに対しては、回復長にかんする詳細な研究が行われている [48, 68]。(これらの先行研究については、次のセクションでやや詳しく見ていくことにする。)ところが、任意の角度に開いた円筒(および球形の)シェルに対しては、その回復長を特徴付けようという試みは、これまでのところなされていない。

平坦な板と自発曲率をもつ板(シェル)には、回復長に関して大きな質的な相違が見られる。それは平坦な板は変形の振幅に依存する回復長を示すのに対して、シェルでは(ある程度振幅が小さい限り)振幅に依存しない回復長をもつ、という点である。このことは同じ材料の物質であっても、幾何学的な性質によってその力学的な応答は変化することを示唆している。

円筒形シェルはこれら二つの変形の間領域としても考えることができる。平坦な板は曲率半径 $R \rightarrow \infty$ の極限であり、円筒は $W \rightarrow 2\pi R$ である。注意すべき点としては、円筒は閉じているのに対して我々のモデルは開いていることである。この自由境界の存在が力学的な応答に重要な役割を果たしている。

4.3 閉じた円筒形シェル (先行研究)

弾性体シェルの先行研究として、閉じた円筒シェルの回復長を調べた論文を紹介しておく (*Persistence of a pinch in a pipe*, L. Mahadevan, A. Vaziri and M. Das, EPL, **77** 40003, (2007)) [68]。この研究では閉じた円筒の端をピンチし、変形が減衰し元の形状に戻るまでの長さを調べている。得られる回復長は

$$l_{\text{pipe}} \sim \frac{R^{3/2}}{t^{1/2}} \quad (4.45)$$

というスケーリング則を示す。ここで R はパイプの半径、 t はパイプの厚みである。この標識によると、シェルの厚みが $t \rightarrow 0$ の極限で回復長は無限大に発散する。そして円筒の曲率半径が大きくなるほど、回復長も大きくなる。また、回復長は物質の弾性係数やピンチの振幅には依存しておらず、幾何学的な形状 (円筒の曲率とシェルの厚み) のみに依存している。この回復長は、微小管のようなマイクロメートル程度のもの [69] から、石油を流す大きなパイプ [70] まで、幅広いスケールに普遍的に存在している。実験の写真 (図 4.4) から、ピンチした箇所から変形が減衰していき、元の形状に戻っていく様子が確認できる。実験の際は、回復長よりも十分大きい長さ L のパイプを用いて行なわれている。また、ピンチする逆側の境界は自由境界である。

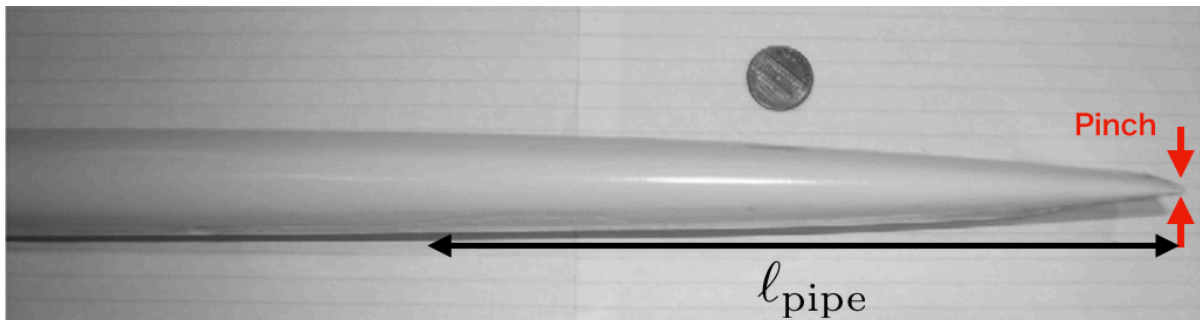


図 4.4. 写真で撮影した円筒状のチューブをピンチした様子。後ろにある効果の直径はおおよそ 1cm である [71]。右端をピンチして (図の赤矢印)、元の形状に戻っていくまでの距離 l_{pipe} が変形の回復長である。

4.3.1 スケーリング議論

力の釣り合いにおける変形の程度は曲げと伸びのエネルギーのバランスで決まると考えることができる。そこでまず、曲げエネルギーを見積もる。曲げエネルギーの支配的な部分は、断面の曲率の変化からもたらされる。円筒の曲率半径を R 、ピンチしたことによる変形の振幅を Δ とすると、変形した断面の曲率は (図 4.5)

$$\delta\kappa \sim \frac{\Delta}{R^2} \quad (4.46)$$

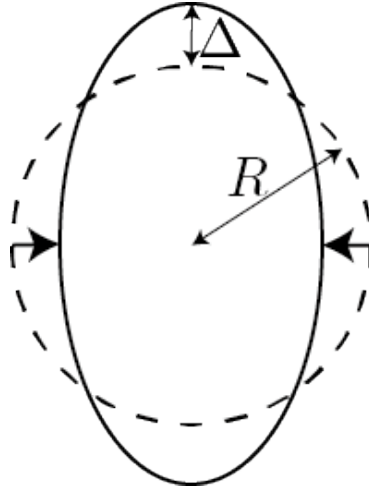


図 4.5. 円筒の断面の変形概念図。半径 R の円筒をピンチしたとき、面外に大きさ Δ だけ変形する。左右の矢印はピンチした点である。円筒では上下で対称な変形が起こる。

となる。変形による曲げエネルギー $\mathcal{E}_{\text{bend}}$ はこの断面の曲率の変化を用いて

$$\mathcal{E}_{\text{bend}} \sim Et^3 (\delta\kappa)^2 R \ell_{\text{pipe}} \sim \frac{Et^3 \Delta^2 \ell_{\text{pipe}}}{R^3} \quad (4.47)$$

と表すことができる。ここで E はヤング率である。次に、伸びエネルギーを見積もる。伸びエネルギーはシェル面内のひずみからもたらされる。円筒シェルはもともとはガウス曲率 0 の曲面であるが、変形の回復長 ℓ_{pipe} の範囲ではガウス曲率が発生する。したがって、その領域では物体は isometric な変形はできないため、面内にひずみが発生する。このおおよその大きさは

$$\epsilon \sim \left(\frac{\Delta}{\ell_{\text{pipe}}} \right)^2 \quad (4.48)$$

となる。これから変形による伸びエネルギーは

$$\mathcal{E}_{\text{stretch}} \sim Et\epsilon^2 R \ell_{\text{pipe}} \sim \frac{Et\Delta^4 R}{\ell_{\text{pipe}}^3} \quad (4.49)$$

と表すことができる。これら 2 つのエネルギーのバランスにより得られる変形の回復長は (4.47) と (4.49) より

$$\ell_{\text{pipe}} \sim \frac{R\Delta^{1/2}}{t^{1/2}} \quad (4.50)$$

となる。ここで変形の振幅 Δ はたかだか R のオーダーになるので、

$$\ell_{\text{pipe}} \sim \frac{R^{3/2}}{t^{1/2}} \quad (4.51)$$

という表式が得られる。よりあいまいさのない正確な議論は後述の我々のスケーリング理論のところと与える。この結果はピンチの振幅によらず、純粋な円筒の幾何形状 (円筒の曲率半径 R とシェルの厚み t) だけで決まる。また厚み t が 0 になると、回復長は無限大に発散

する。これは変形が曲げのみになることを意味しており、物体全体で一様な曲げ変形が起こることを意味する。

4.3.2 結果

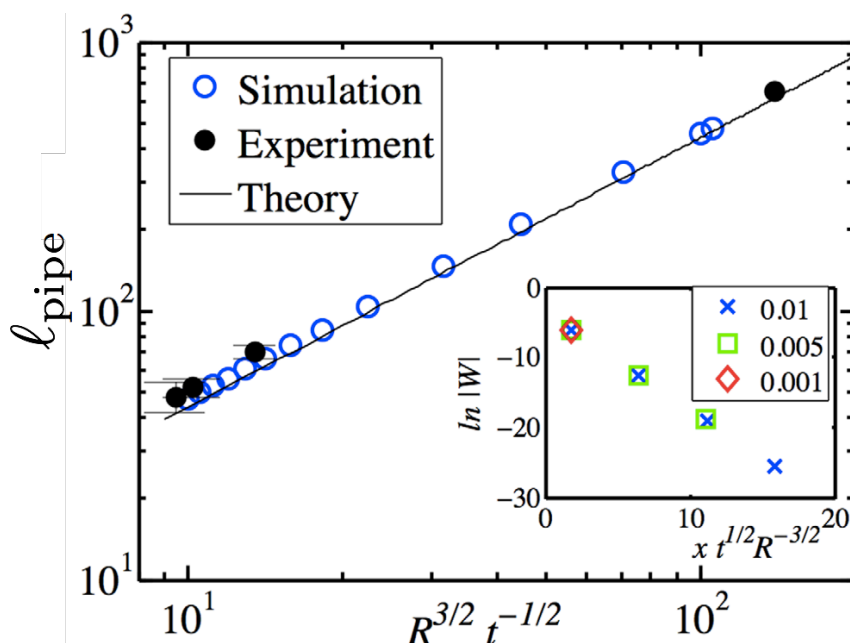


図 4.6. 円筒をピンチした時の回復長を、実験と数値シミュレーションによって得られた結果をまとめてプロットしたグラフ。パラメータ t と R のさまざまな組み合わせによって得られる回復長はスケーリング議論による予測と一致していることが観察される。右下のインセットは、数値計算によって得られた様々な厚さ t の円筒シェルの面外変形の振幅の大きさ W が指数関数的に減衰していく様子を表している。横軸は、軸方向の位置 x を $R^{-3/2}t^{1/2}$ でスケールしている。

実験と数値シミュレーションの結果をまとめてプロットしたものが図 4.6 である。パラメータ t と R のさまざまな組み合わせによって得られる回復長はスケーリング議論による予測と一致していることが観察される。図 4.6 の右下のインセットは、数値計算によって得られた様々な厚さ t の面外変形の振幅 W が指数関数的に減衰していく様子を表している。

4.4 平坦な strip の回復長

次に平坦な strip がどのように開いていくかという研究を紹介する (*How a Curved Elastic Strip Opens*, T. Barois, L. Tadrist, C. Quilliet and Y. Forterre, PRL **113** 214301 (2014)) [48]。これは平坦な strip を円筒表面に巻きつけた時に、どのようにして元の形に戻っていくかという研究である。彼らは幅 W 、厚さ t 、長さ L の strip を半径 R の円筒状のものに巻きつけ、どの程度の距離で変形が減衰しもとの形状を回復するのかを調べた (図 4.7 を参照)。先ほどの円筒の場合もそうだが、これらの系をピンチしたときの変形はなめらかであり、弾性欠陥は作られない。薄いシートを考える時は丸めた紙のように、ridge や

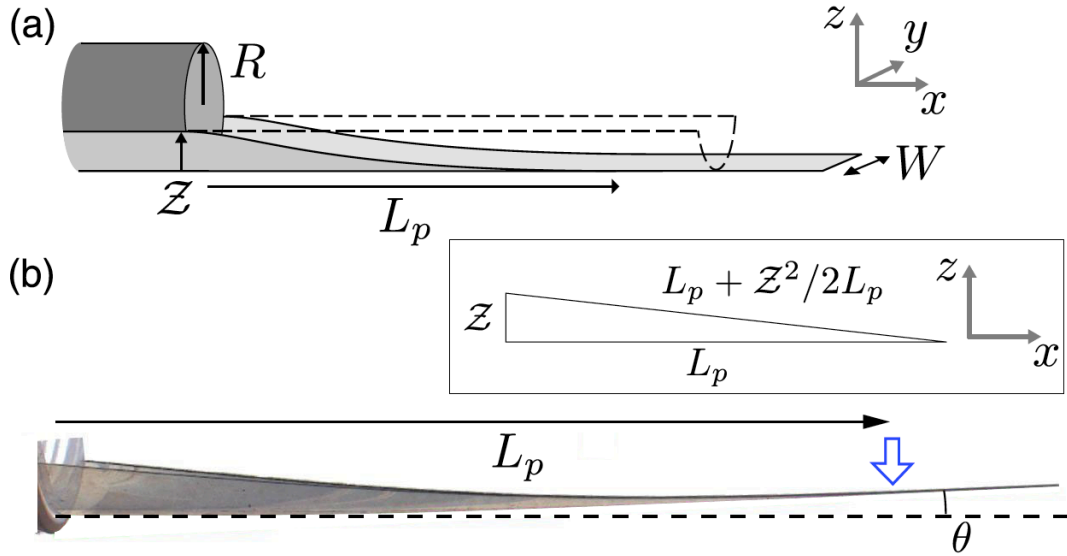


図 4.7. 幅 W 、厚み t 、長さ L の平坦なリボンを半径 R の円筒に巻きつけた時の変形の様子と回復長 L_p の定義。リボンを巻きつけた時に面外方向への変位の大きさを Z としている。

d-cone などの欠陥を伴うことがほとんどである。これらの欠陥は応力を一点に集中させることによって、伸びエネルギーをおしつけ、欠陥の周りでは曲げエネルギーだけで変形できると考える。一方で、今考えている系のように、応力集中を起こさずに拡散的な伸びと曲げのバランスを実現する系もある。

4.4.1 スケーリング解析

曲げのエネルギーは

$$\mathcal{E}_b \sim Et^3 W L_p \left(\frac{1}{R} \right)^2 \quad (4.52)$$

である。ここで R は巻きつける円筒の半径である。巻きつけた時の面外方向への変位の大きさ Z のおおよその大きさは、 $Z \sim W^2/8R$ と求めることができる。これを用いると曲げのエネルギーは

$$\mathcal{E}_b \sim Et^3 W L_p \left(\frac{Z}{W^2} \right)^2 \sim \frac{Et^3 L_p Z^2}{W^3} \quad (4.53)$$

となる。ここで数係数は無視した。

伸びエネルギーは

$$\mathcal{E}_s \sim Et W L_p \epsilon^2 \quad (4.54)$$

ここで ϵ は面内の典型的なひずみの大きさである。面内の典型的なひずみの大きさは

$$\epsilon \sim \frac{Z^2}{L_p^2} \quad (4.55)$$

なので伸びエネルギーは

$$\mathcal{E}_s \sim \frac{EtWZ^4}{L_p^3} \quad (4.56)$$

となる。

曲げと伸びのエネルギーをバランスさせることによって、回復長の長さスケールが得られる：

$$L_p \sim W \sqrt{\frac{Z}{t}} \quad (4.57)$$

これより回復長 L_p は幅に比例して大きくなり、振幅の $1/2$ 乗 ($Z^{1/2}$) に比例して大きくなる。そして厚み $t \rightarrow 0$ の極限で $L_p \rightarrow \infty$ となる。これは変形が曲げのみで起こることを意味しており、その時はもはや断面方向の曲率は変化しない。言い換えるとガウス曲率が変化しない isometric な変形をしているといえる。

4.4.2 実験

上記のスケール議論を確認するために、彼らは紙を用いた実験を行なっている。実験では紙に描いたグリッド線がどのように変化するかを測定し、strip の断面の曲率分布を計測している。クランプからの距離を $W/\sqrt{Z/t}$ でスケールプロットするとプロファイルはよく一致していることが確認される。

4.4.3 1次元モデル

実験により上記のスケール則は確認できた。彼らは数係数を決定するために、断面の曲率を用いた 1次元モデルを提案している。strip の 3つの長さスケールは分離している： $t \ll W \ll L$ 。大きな変形に対して $Z \gg t$ 、断面方向には $t \gg W$ で曲げ変形のみが可能である。一方で長軸方向に対しては $W \ll L$ なので伸びの変形だけが可能になる。したがって可能な変形は断面方向への曲げ変形と、長軸方向への伸び変形のカップリングとなる。この変形を記述するために、彼らは長軸 (x) 方向に沿った断面方向の曲率の変数 $c(x)$ を考えた。ここから板の曲げエネルギーは $Et^3c^2(x)/24$ で与えられる。

彼らが求めた、変形に伴う弾性エネルギーは

$$\mathcal{E}_0(c, c') = \int_{x,y} \left[\frac{1}{2^3 \times 3} Et^3 c^2(x) + \frac{1}{2^7} Etc'^4 v^8 \right] dx dy \quad (4.58)$$

となった。ここで彼らは解 $c(x)$ の形としてパラボラ型を仮定した：

$$c(x) = (x - L_p)^2 / \lambda^3. \quad (4.59)$$

ここで $\lambda^3 = 4\sqrt{3\alpha/\gamma}$ である。ここで境界条件は $c(0) = 1/R$ で回復長は

$$L_{p,c} = W \sqrt{\frac{Z}{2t}} \quad (4.60)$$

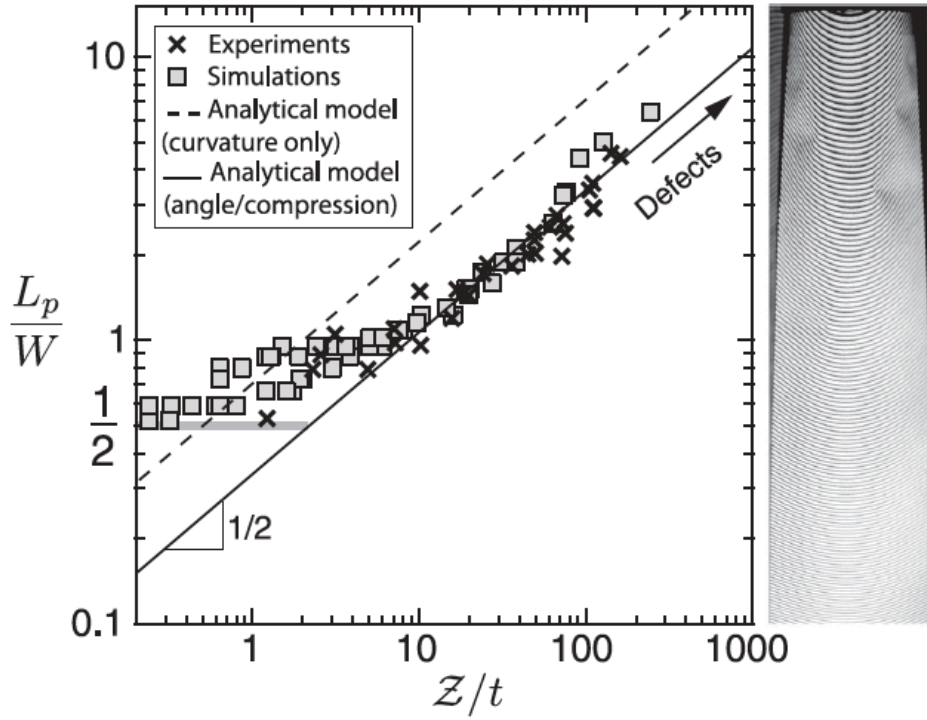


図 4.8. 実験と数値計算から得られる回復長をリスケールしてプロットしたグラフ。破線は式 (4.60) で実線は式 (4.62) である。1 次元の改良モデルでは数係数を含め実験と良く一致している結果得られている [48]。

で与えられる。この関数 $c(x)$ は最初に予測していたスケーリング則のべきを満足している。この関数を実験データと共にプロットしたものが図 4.8 の破線である。まだ数係数は実験データを満足に表現できていないことがわかる。彼らはこの理由を、実際の strip では中心線はわずかに傾くが、モデルは中心線が全く変形しないことを暗に仮定していることが原因だと考えた。よって、改良したモデルではこの点に改良を加えた。

新たな 1 次元モデルでは、長軸方向の中心線の変位 a_x, a_z を考慮に入れた。この 2 つのパラメータを考慮すると、修正された変形時の弾性エネルギーは

$$\mathcal{E}_{a_x, a_z}(c, c') = \mathcal{E}_0(c, c') + \int_0^\infty [\tau a_x'^2 + \mu a_x' c'^2 + \beta a_z' c'^3 + \delta a_z'^2 c'^2 + \eta c' a_x' a_z'] dx \quad (4.61)$$

となる。ここから求めることができる回復長は

$$L_{p, \{c, a_x, a_z\}} = W \frac{2}{\sqrt{35}} \left(\frac{Z}{t} \right)^{1/2}. \quad (4.62)$$

という表式になった。中心線の変化自体は少ないが ($|a_x'| < 0.1\%$, $|a_z'| < 0.06$) その影響は大きく、数係数はかなり下がった。彼らの結果は数値計算と実験結果をかなり正確に再現している (図 4.8 の実線)。

4.5 本研究のモデル

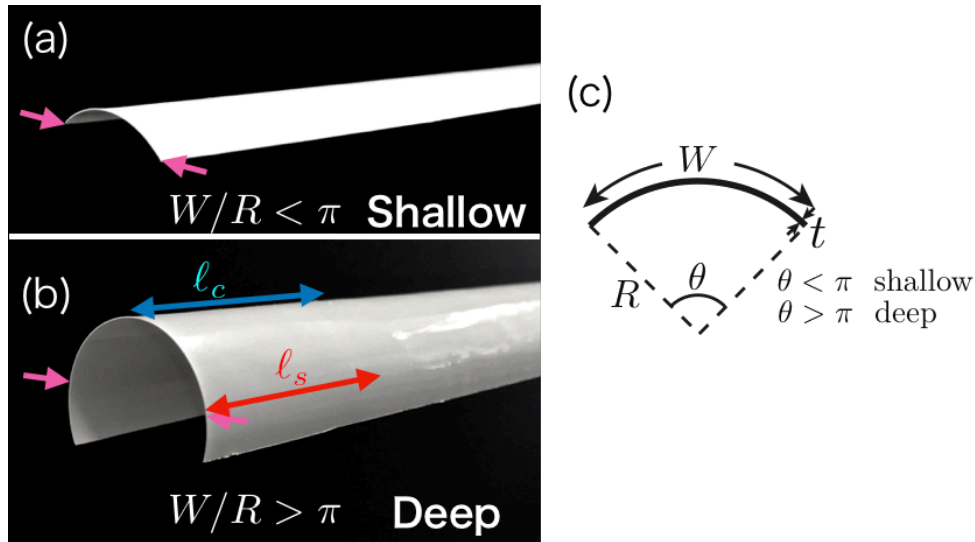


図 4.9. (a)(b) 本研究で使ったシェル。開き角度によって浅い (shallow) シェル (a) と、深い (deep) シェル (b) に分類している。また深いシェルの場合は端に近い領域の回復長 l_s と中央の回復長 l_c を区別している。(c) 曲率半径 R 、幅 W 、厚み t のシェルの断面の形状。 $\theta = W/R$ はシェルの開き角度であり、 π より大きい場合と小さい場合で区別している。実際の実験では、重力の影響をなくするため、地面に鉛直に立てて測定を行う。

先行研究をふまえて、我々は開いた円筒形シェルに対する回復長について調べる。片端の円筒断面の両端をピンチし、もう片方は自由境界にする。ここでは曲率半径 R 、幅 W 、厚さ t 、長さ L の円筒形シェルを考えている (図 4.9 を参照)。曲率半径 R や幅 W は厚さ t に対して十分大きいとし、長さ L は曲率半径や幅に対して十分大きいとする。

$$t \ll R, W \ll L \quad (4.63)$$

与えるピンチの振幅は厚み t の 2 – 5 倍程度で行なう。与えるピンチの振幅 δ は厚み t の数倍から数十倍で変化させても得られる結果には影響を与えないことは後に述べる。理論的には無限に長い場合を考えるが、実験や数値計算では境界の影響が現れる可能性があるので、長さ L は十分に長く取る。

開いた円筒形シェルの開き角度 W/R が π よりも大きいか小さいかで、我々は開いたシェルを分類した。 $W/R < \pi$ の時は「浅い (Shallow) シェル」、 $W/R > \pi$ の時は「深い (Deep) シェル」と呼ぶ。深い場合は、境界付近と、境界から遠い中央付近では別の回復長の長さスケールが現れると予測した。この 2 箇所を区別するために、我々は深いシェルの境界付近では浅いシェルと同じ長さスケール l_s が、断面の中央付近では円筒の長さスケール l_c が現れると考えた (図 4.9)。

4.6 スケーリング解析

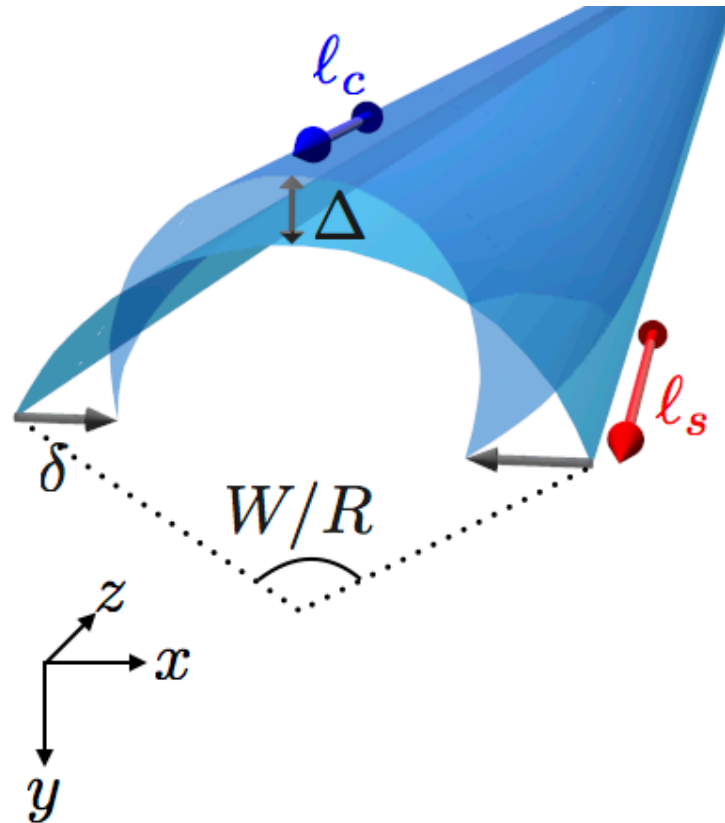


図 4.10. 今回の系で使用した様々な幾何学パラメータの定義 (幅 W 、曲率半径 R 、厚み t)。また W/R をシェルの開き角度と定義している。また協会に近い部分の回復長を l_s 、中央の領域の回復長を l_c としている。

弾性体の変形の回復長をスケーリング理論から見積もる。曲げエネルギーと伸びエネルギーのバランスから見積もる。弾性薄膜は十分薄い場合、曲げと伸びのエネルギーを分離して考えることができる。これは伸びのエネルギーが t に比例するのに対し、曲げのエネルギーは t^3 に比例するからである。つまり $t \rightarrow 0$ の極限では完全に曲げ変形だけになる。厚みが有限であっても、厚みが十分に小さい場合は伸びのエネルギーコストは曲げのエネルギーコストに対して大きなものになる。得られる変形はこれらのエネルギーがバランスするところで決まる。曲げエネルギーは厚みの 3 乗に比例し

$$\mathcal{E}_{\text{bend}} \sim Et^3(\delta\kappa)^2Wl \quad (4.64)$$

と表すことができる。ここで l は変形の回復長である。現在の問題設定では支配的な曲げエネルギーは断面の曲率の変化 $\delta\kappa$ である。図 4.10 のように考えると、曲率の変化は面外変位の大きさ Δ を用いて、幾何学的な関係式より

$$\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) = \frac{4\Delta}{W^2} \quad (4.65)$$

を得る。ここで R' は変形後のシェルの曲率半径である。また変形に際して、幅 W は一定という条件を用いた。式 (4.65) の右辺の括弧内は曲率の変化 $\delta\kappa$ を表しているので

$$\delta\kappa \sim \frac{\Delta}{W^2} \quad (4.66)$$

という関係を見積もることができる。これより曲げエネルギーは

$$\mathcal{E}_{\text{bend}} \sim \frac{Et^3 \Delta^2 \ell}{W^3} \quad (4.67)$$

となる。次に伸びエネルギーを考える。伸びエネルギーは厚みの 1 乗に比例し

$$\mathcal{E}_{\text{stretch}} \sim Et\epsilon^2 W \ell \quad (4.68)$$

と表すことができる。歪みはガウス曲率の変化から見積もることができる。歪みを考えるときは断面の曲率は $1/R + \Delta/W^2$ である。変形の回復長を ℓ とすると、長軸方向の曲率は Δ/ℓ^2 で与えられる。もともとの円筒ではガウス曲率は全域で 0 であった。ピンチすることにより発生するガウス曲率は Δ が十分小さいとすると、2 次の項は無視して

$$\kappa_G \sim \frac{1}{R} \frac{\Delta}{\ell^2} \quad (4.69)$$

と表すことができる。ガウス曲率は応力の変化量と直結しているので (付録の (B.184) の 2 番目の式)

$$\nabla^2 \sigma \sim E \kappa_G \quad (4.70)$$

であるが、微分演算子はいま、幅方向の変化が大きいので $\nabla \sim 1/W$ とみなせる。よって支配的な応力の大きさは

$$\sigma \sim EW^2 \kappa_G \quad (4.71)$$

となる。

応力と歪みの線形の関係 $\sigma \sim E\epsilon$ より歪みは

$$\epsilon \sim W^2 \kappa_G \sim \frac{\Delta W^2}{R \ell^2} \quad (4.72)$$

となる。これより伸びエネルギーの値は

$$\mathcal{E}_{\text{stretch}} \sim \frac{Et \Delta^2 W^5}{R^2 \ell^3} \quad (4.73)$$

となる。伸びエネルギーと曲げエネルギーのバランス $\mathcal{E}_{\text{stretch}} \sim \mathcal{E}_{\text{bend}}$ から見積もられる変形の回復長は

$$\ell \sim \frac{W^2}{\sqrt{Rt}} \quad (4.74)$$

となる。

この長さスケールは $t \rightarrow 0$ で無限大に発散する。またピンチの深さ δ にも、弾性係数 E (および ν) にも依存せず、幾何学的なパラメータのみで決まる。これらの事情は、完全な円

筒に対する結果と一致する。一方、我々の系では、 W, R, t はすべて独立なパラメータであるので、完全な円筒に対するスケーリングと比較して、 R に対する依存性が異なっている。容易に確かめられるように、式 (4.74) に $W = 2\pi R$ を代入することで、直ちに円筒に対するスケーリング則を回復することができる。ただし、後に述べるように、この場合でも円筒にスリット（切り込み）がある場合とない場合では、数係数に違いが現れる。また、平坦な strip の一端を円筒に巻きつける場合、 $W^2/R \sim \Delta$ であることを考慮すると、式 (4.74) から今度は前出の平坦な strip に対するスケーリング関係式 (4.57) を再現する。ただしこの場合の R は、変形後にできる曲率半径の大きさであることに注意する。以上のことから、我々のスケーリング則は先行する研究成果を一般化する結果であり、それぞれの極限で先行結果に一致することが確認される。

4.7 実験

スケーリングの予測を確認するために、我々はマクロモデルの系統的な実験を実施した。プラスチックのシートを熱加工して作成したシェルと、市販のストローを切開して作成したシェルを用いて実験を行なった。

4.7.1 シェルの作成方法

プラスチックのシートには、2種類の厚み $t = 0.2\text{mm}, 0.3\text{mm}$ をもつ平坦なポリスチレンのシート (TAMIYA) を用いた。プラスチックシートに永久的な自発曲率を加えるために、お湯を用いて熱加工し形成する。径の異なる2種類の円筒容器 $R = 13, 43\text{mm}$ の内側に沿うように、平坦なシートを円筒状に一方に丸めて円筒壁面に沿うように配置する。シートを配置した円筒容器の中に約 90° のお湯を入れ、10分ほどシートを加熱成形する。このとき、円筒側面からシートが離れると断面の形状が真円からずれるので、壁面から離れた場合は棒などを使って壁面に押し付ける。10分経過後、流水で冷やし、室温に戻して取り出すとシートに永久的な曲率が形成されている。このような熱形成の過程は、曲率を持った薄い構造物を作る過程で一般的に使われている手法である [72]。取り出したプラスチックシートは1方向に曲率がついており、もう1方向には平坦な円筒形状をしている。形成されたシェルは断面方向の端の方は曲率があまりつかないので、端を切り取る。その後、実験で使う任意の幅 W に切り出して使用する。

得られた円筒の形状は、熱加工による成型に使った円筒よりも少し大きな曲率半径を持っている。この現象は *spring back* と呼ばれ、工業的に重要な問題であり、よく知られている [72]。出来上がったシェルの曲率半径を正確に測定するために、ImageJによる画像解析で断面の曲率を調べた。得られた円筒形シェルの断面の形状をデジタルカメラで撮影し、ImageJによる画像解析で断面の形状のデータを抽出した (図 4.11)。得られた断面のデータを円の方程式を用いてフィッティングを行なった：

$$(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2 = 0 \quad (4.75)$$

データ点のフィッティングには最小二乗法を用いた。(4.75)式において x_i, y_i はデータ点の位置座標、 x_0, y_0 は円の中心点の座標、 R は円の半径である。この方程式を両辺2乗して

$$(x_i^2 + y_i^2 + Ax_i + By_i + C)^2 = 0 \quad (4.76)$$

とする。ここで $A = -2x_0, B = -2y_0, C = x_0^2 + y_0^2 - R^2$ である。この方程式を i について和を取り、パラメータ A, B, C で偏微分し、誤差がもっとも少ない値を算出する。式 (4.76)

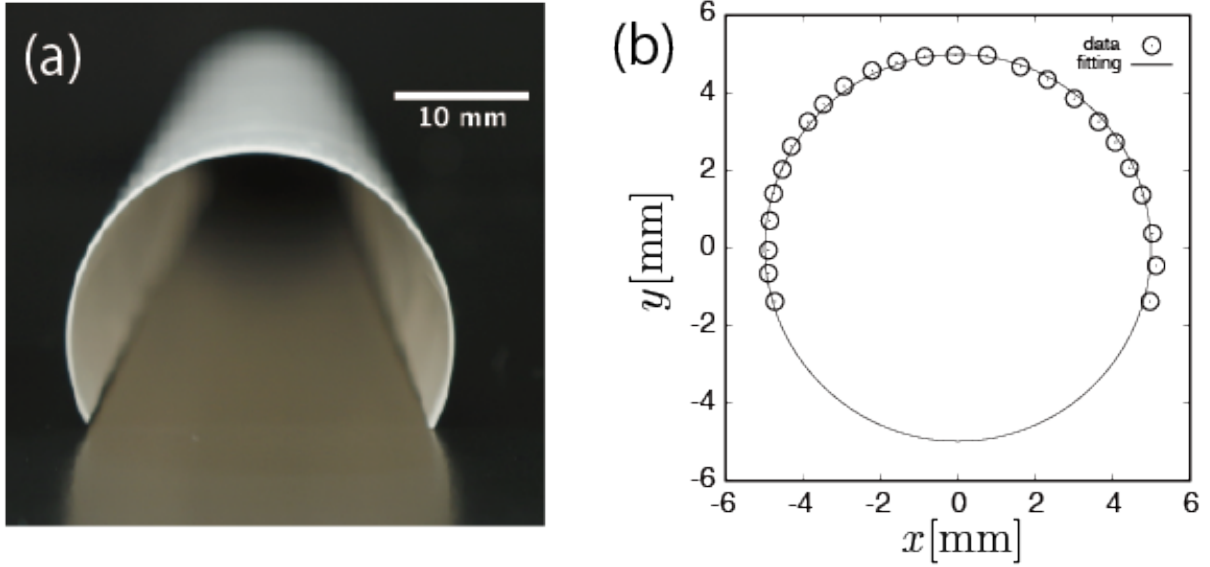


図 4.11. 実験で用いた円筒形シェルの断面の曲率の測定。曲率の測定はシェルの端の断面で行なった。デジタルカメラの撮影により得られた画像 (a) を ImageJ による画像解析で断面の形状を測定した。得られた断面の形状のデータを円の方程式 (4.75) を用いてフィッティングを行いシェルの曲率半径を測定した。得られた結果は断面の形状のデータ点がフィッティングの線上に乗っており、真円に近い円であることが確認できる (b)。

を i について和を取り各パラメータで偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial A} (x_i^2 + y_i^2 + Ax_i + By_i + C)^2 = \sum_{i=1}^n 2(x_i^3 + x_i y_i^2 + Ax_i^2 + Bx_i y_i + Cx_i) \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial B} (x_i^2 + y_i^2 + Ax_i + By_i + C)^2 = \sum_{i=1}^n 2(y_i x_i^2 + y_i^3 + Ax_i y_i + By_i^2 + Cy_i) \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial C} (x_i^2 + y_i^2 + Ax_i + By_i + C)^2 = \sum_{i=1}^n 2(x_i^2 + y_i^2 + Ax_i + By_i + C) \quad (4.79)$$

となる。ここで n は離散位置データの個数である。これらを書き直すと

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum y_i & \sum 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum (x_i^2 - x_i y_i^2) \\ -\sum (x_i^2 y_i - y_i^3) \\ -\sum (x_i^2 - y_i^2) \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

となる。この行列を A, B, C について解き、得られた値から x_0, y_0, R を求める。得られたデータの各点における曲率は十分一様であり、図 4.11 からも断面の形状は真円の一部にかなり近いことが確認できる。最終的に判明した円筒の半径は $R = 12 - 48\text{mm}$ 、幅は $W = 18 - 57\text{mm}$ の範囲にあることがわかった。

我々はまた、市販されているプラスチックのポリビニルクロライドのストローを長軸方向に切り開いて、異なる W を持つシェルを用意した ($R = 5\text{mm}, t = 0.25\text{mm}$) (図 4.12(a))。

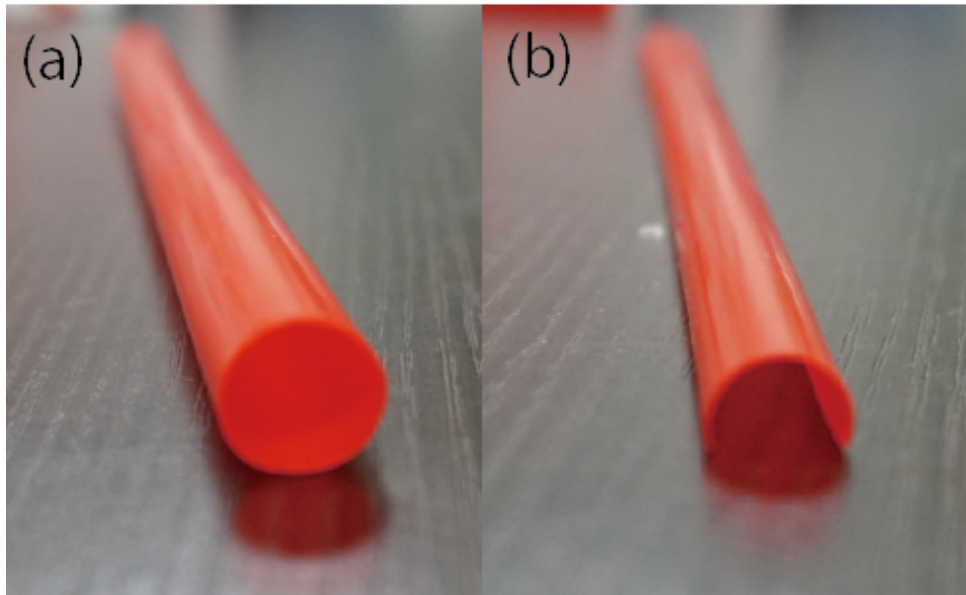


図 4.12. 実際に使用したストロー (a) と切断後の実験に使用したシェル (b)。

切断する際は、ストロー内部に鋼鉄性の支柱を入れ、支柱ごと挟んで固定して動かないようにした。そして、 z 軸方向に直線的に切れ目を二箇所入れ、まっすぐに切断した (図 4.12(b))。

4.7.2 回復長の測定実験

用意した 2 種類の円筒形シェルは地面に対して垂直にセットし、一番上端をノギスを用いてピンチする。この時、もう片端は、フォースフリーかつモーメントフリーの自由境界にしておく。変形を加えた後に得られる形状をデジタルカメラで撮影する。得られた画像を ImageJ により画像解析を行う。円筒形シェルの端の x 方向の変位 u_x を長軸 (z) 方向の関数として求める。 $W/R < \pi$ の時は $s = \pm W/2$ 、 $W/R > \pi$ の時は $s = \pm \pi R/2$ において得られる x 方向の変位 u_x のプロファイルを、Shallow Shell 理論の線形解析から得られる関数を用いてフィットする (詳細は後述する)。

中央 ($s = 0$) での面外への変位 u_y (図 4.10 の Δ は $u_y(z = 0)$ の値) はデジタルカメラの画像解析によって検出するには小さすぎるので、レーザー変位計 (LK-G35, KEYENCE) を用いて測定する。中央の変位を測定する際は、レーザー変位計のレーザーを円筒形シェル表面に垂直にあたるように設置する (図 4.14)。また、レーザー変位計は水平に移動できるようにステッピングモーターに設置しておく。測定をする際に円筒形シェルの中央は、 y 方向に最もレーザー変位計に近い箇所を中央とし、その z 方向の変位から中央の回復長を測定する。

変形を加えた際に円筒形シェルは断面方向の変形に伴い、ピンチしている 2 点を中心に x 方向に角度 θ_0 だけ回転する (図 4.13)。 y 方向の変形 u_y から回復長を求める際には、この

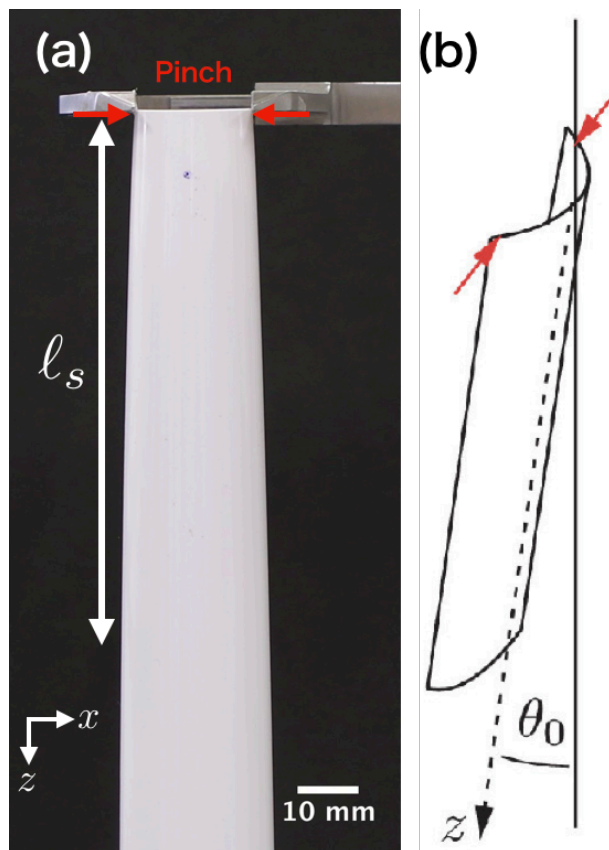


図 4.13. 円筒形シェルをピンチしている様子。ピンチした箇所 (赤い矢印) から変形の振幅は減衰し、回復長程度の距離で元の形に戻っていく様子が見られる (a)。また円筒形シェルのピンチではシェルは x 軸周りに剛体回転する。このときの角度 θ_0 が与える回復長の効果は差し引いて求めている。

剛体回転を考慮に入れた。この剛体回転の角度 θ_0 は典型的には $1 - 2^\circ$ 程度であり、 u_x に与える影響は十分小さい。

上でデータ解析を行なったレーザー変位計による測定によって、円筒形シェルの 3 次元形状を得ることができる (図 4.15)。我々が使用しているレーザー変位計は基準距離 30[mm] から前後に ± 5 [mm] の範囲で測定できる。そのため、円筒形シェルは変形後の厚さが 10[mm] 以内であれば測定できる。測定はステッピングモーターでシェルを移動させながら表面を 2D スキャンし、その形状を測定する。レーザー変位計の測定値が範囲外になったところがシェルの境界と判断する。レーザー変位計を x 軸方向に一定間隔で移動させながら測定を繰り返す。得られたデータを結合することで、シェルの 3 次元形状を得ることができる (図 4.15(a))。この測定方法では、深いシェルの場合、測定する面の後ろ側に入り込んだ面の形状は測定できない。また、横方向の変位が縦の変位の振幅よりも大きいことも観察できる (図 4.15(b))。ただし、横方向の変位は端に近づくにつれて測定できない部分が増えていくので、図に乗せているデータは途中で打ち切っている。

理論解析から得られる x 方向の変位のプロファイルは次のような関数で表現できる (4.10)

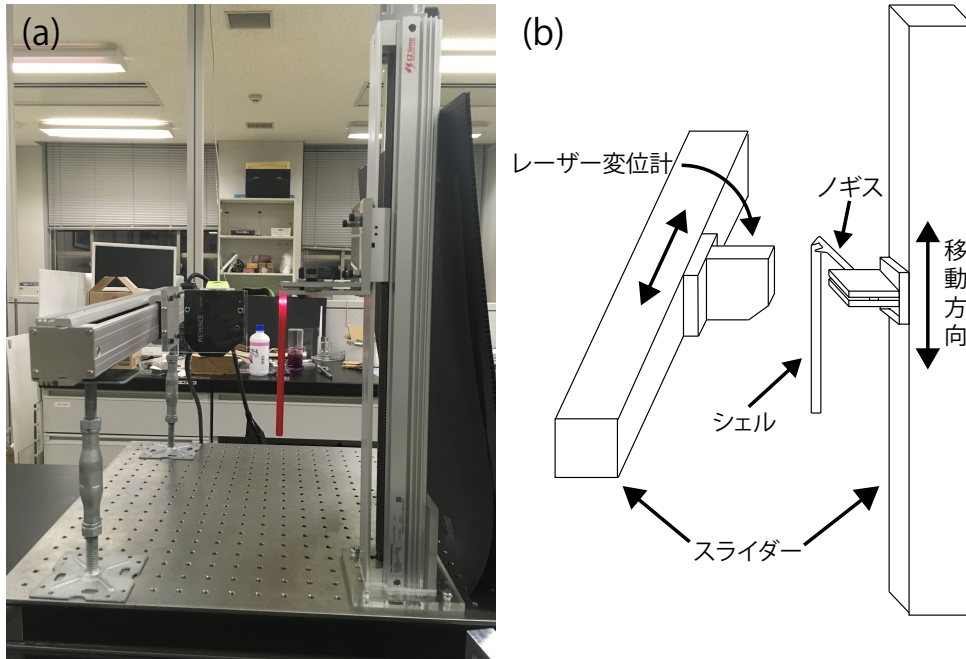


図 4.14. 実験のセットアップ (a) とその概念図 (b)。ステッピングモーターに取り付けた固定台にノギスを取り付け、ノギスで円筒形のシェルをピンチしている。ノギスを移動させることのできるステッピングモーターは垂直方向に移動することができる。レーザー変位計は地面に水平に動くステッピングモーターに固定している。円筒形シェルの上端の中央付近の高さをレーザー変位計で測定し、水平方向に移動させながら最もレーザー変位計の方向に飛び出している点を測定して中央を決定する。その後シェルを移動させながら高さの地面と垂直方向への変化を測定する。

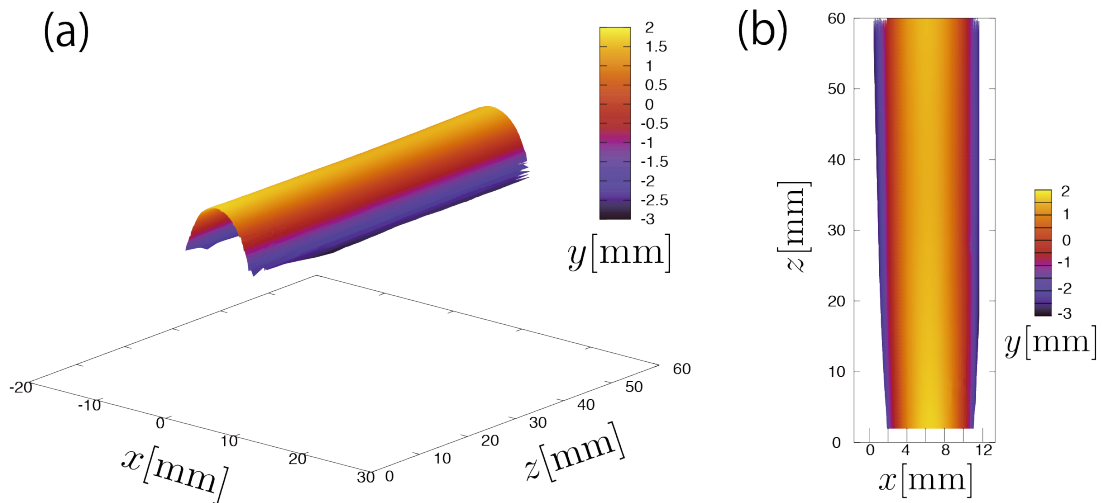


図 4.15. 実験によって得られた円筒形シェルの変形時の形状。(a) x 方向に少しずつレーザー変位計を移動させて z 方向の高さを測定した結果をまとめてプロットしたグラフ。円筒シェルの形状をスキャンすることに成功している。(b) (a) のデータを上から見たときのカラーマップ。 x 方向に z 軸が小さい方の端をピンチしている。図を見ると x 方向には変形が元に戻っていく様子が見られる。 y 方向の変化は少ないのでここで確認するのは難しいので、後にデータで示す。 y 方向も振幅は小さいが変形が減衰していく様子を観察することができる。

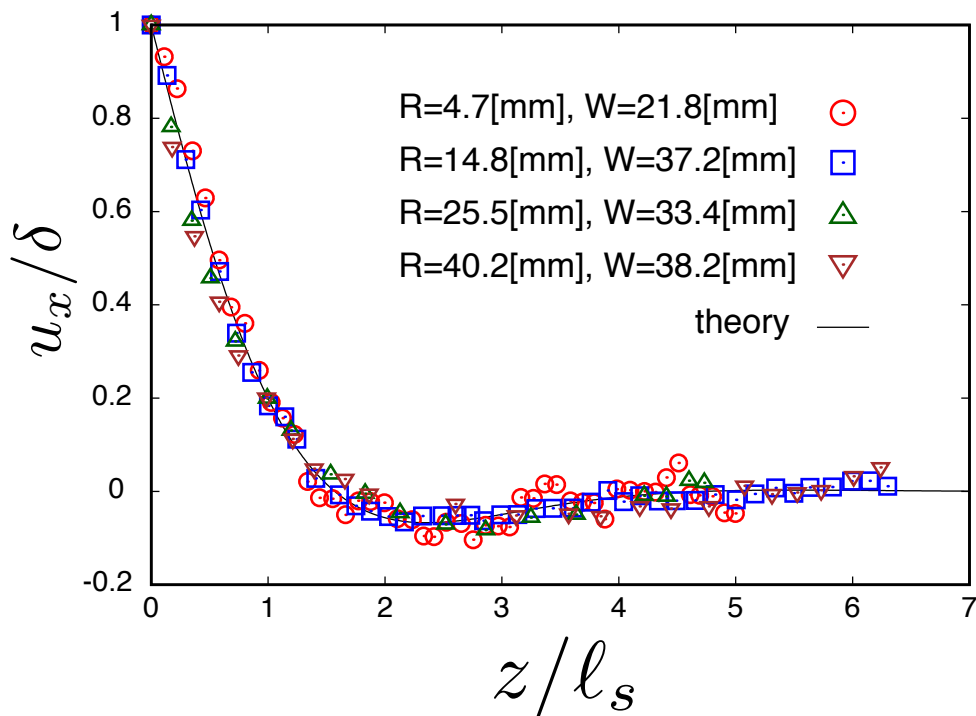


図 4.16. 様々な R と W で測定した実験の結果をスケーリング理論で見積もった回復長でスケールしたプロット。厚みは全て $t = 0.2[\text{mm}]$ で実験している。実践は理論曲線を示している。全ての実験結果は理論曲線 (式 (4.81)) とよく一致している。

章で後述する) :

$$u_x(s, z) \approx \delta \exp(-kz) \cos(kz) \cos(2\pi s/W) \quad (4.81)$$

ここで、 $k = 1/\ell_s$ である。測定データにこの (4.81) をフィットさせることで、回復長 $1/k \sim \ell$ を算出する。なお、上述した剛体回転の影響をデータから適切に取り除いた上で式 (4.81) を適用する。異なる R と W の系に対する測定データが (4.81) から予言されるスケーリング則をよく満たすことを確認した (図 4.16)。同じ手続きを y 方向に沿った中央の回復長 ℓ_c にも行う (図 4.17)。 u_y 方向のプロファイルも円筒形シェルのスケーリング (4.74) 式に従うことが観察できる。

4.7.3 重力の影響

本研究の主な解析では、シェルに作用する重力の影響を考慮していない。我々がもちいたシェルの硬さと垂直配置の実験条件から、直感的には重力の効果が十分小さいことが期待される。これを確認するために、我々のシェルを、重力下で一端のみを固定して水平に支持する、という状況を考える (材料力学で言うところの「片持ちはり」の問題である)。このとき、重力によるシェルのたわみはもっとも顕著になることが予想される。この大きさのオーダーがどの程度であるか、見積もってみよう。

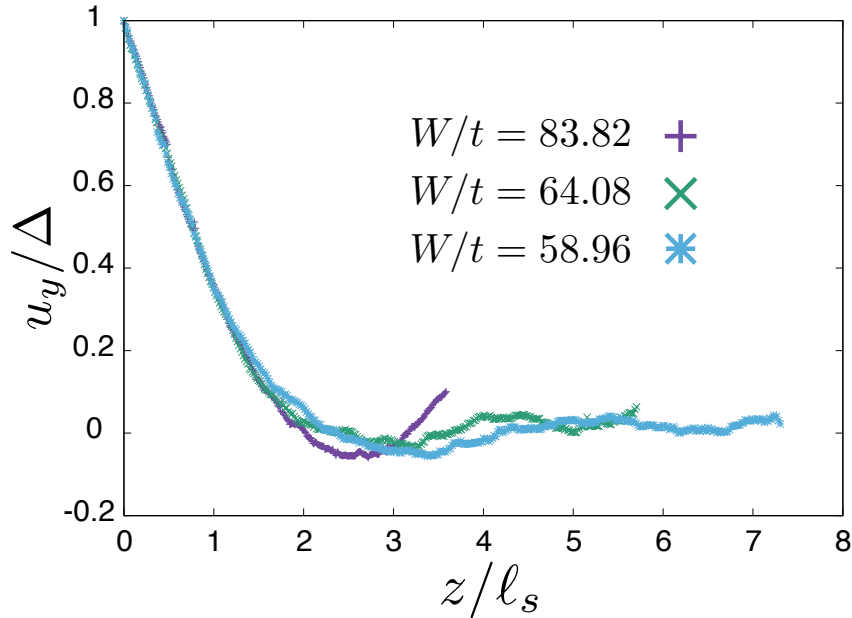


図 4.17. レーザー変位計の測定によって得られた開いた円筒シェルの中央の y 方向への変位を、変位を振幅 Δ で、 z 方向の距離を回復長でスケールプロットしたもの。ただし縦軸は絶対値で表示してある。表示している 3 つの実験データはともに曲率半径の大きさは約 $R = 5[\text{mm}]$ 、 $t = 0.25[\text{mm}]$ であり W を変化させたものであるがデータはよく重なっていることが観察できる。

密度 ρ 、長さ L 、断面積 $S = Wt$ の円筒形シェルが重力下にあるとする。シェルの長軸を重力に対して垂直に設置し、片側の断面を固定する。このとき、シェル全体にはたらく、重力による力 P は $P \sim \rho SLg$ と表すことができる。したがって、この力によってシェルに働く重力のモーメントは $M_g \sim PL$ となる。

重力によってはりが変形した時の、典型的な変位の大きさを u とすると、変形により生み出される曲率の大きさ κ はおよそ $\kappa \sim u/L^2$ となる。モーメントと曲率は構成関係式より

$$M = EI\kappa \quad (4.82)$$

の関係にある。ここで、 I は断面の幾何学的な慣性モーメント (断面二次モーメント) で、

$$I = \iint (y - y_0) dx dy \quad (4.83)$$

より計算される。ここで y_0 は断面の重心の位置であり、円筒形シェルの場合は

$$y_0 = 2R \frac{\sin(\theta/2)}{\theta} \quad (4.84)$$

である。ここで $\theta = 2\beta$ として、 y_0 を式 (4.83) に代入すると、

$$I = tW^3 \left[\frac{2\beta^2 + \beta - 4 \sin^4 \beta}{16\beta^4} \right] \quad (4.85)$$

を得る。

これより片持ちはりの典型的な変位は

$$u \sim \frac{\rho SL^4 g}{EI} \quad (4.86)$$

と表すことができる。

今回実験に使用したシェルの典型的な物性値は、密度 $\rho \sim 1 \times 10^6$ [kg/m³]、ヤング率 $E \sim 3 \times 10^9$ [Pa]、断面積 $S \sim 0.4 - 1.8 \times 10^{-5}$ [m²]、長さ $L \sim 3 \times 10^{-1}$ [m]、重力 $g \sim 10$ [N]、慣性モーメント $I \sim 10^{-11} - 10^{-10}$ [m⁴] である。これらの典型的な物性値を入れて (4.86) を評価すると、おおよそ $u \sim 1$ [mm] となる。これはシェルを水平に支えたときに予想される重力による変位のオーダーである。実際の実験では、我々はシェルを垂直に設置するので、さらにこの効果はずっと小さくなる。ピンチした際に、シェルの断面における質量中心の変化により、シェルは全体としてわずかに剛体回転するが、そのときの重力によるシェルの変形の程度は、この回転による変位に $u/L \sim 3 \times 10^{-3}$ をかけた程度になる。したがって、このレベルの変位は、集中力によって印加した変形と比較すると、ほとんど無視できる大きさであると結論できる。

4.8 数値計算

ここまでの理論解析と実験の結果をさらに補強するために、我々は汎用の構造解析ソフトウェア Abaqus (Dessault System, USA) をもちいて、有限要素法による数値シミュレーションを実施した。模型を用いた実験では重力の影響などもあるため、実現可能なパラメータセットの範囲は限られてしまう。これに対し、数値計算では、より広いパラメータ領域での調査と、より精密なデータ解析が可能である。シェルの薄さとしては、 $t/R = 5 \times 10^{-5} - 10^{-2}$ の範囲での計算を実施した。Abaqus のシェル構造の計算では、厚み方向にも数点の離散要素（典型的には 5-10 要素）が割り当てられ、準 2 次元的な弾性体モデルを扱う。これにより、理想化された完全に 2 次元的なシェルモデルよりもさらに精度の高い構造解析予測を行うことが可能である。（具体的には、少し厚みのある板の変形を記述できる Mindlin-Reissner plate theory をもとに構築された有限要素解析モデルの計算を行う。付録 D も参照のこと。）

今回の計算では、4 ノードの四辺形格子をもちいてシェルの中央面を分割する。メッシュ数は典型的には 20000-75000 とした。弾性体のモデルとしては、等方的な線形弾性体を仮定し、その弾性エネルギーを最小化することで、与えられた境界条件のもとでのシェルの平衡構造を決定した。そのさい、幾何学非線形（微小ひずみ近似）を正しく取り入れた計算を行っている。物性値としては、ヤング率 $E = 1[\text{GPa}]$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ を仮定して計算を行った。これらの値は、典型的なプラスチック板の値に相当する。ピンチする箇所は、浅いシェル ($W/R < \pi$) に対しては、 $s = \pm W/2$ 、深いシェル ($W/R > \pi$) に対しては、 $s = \pm \pi R/2$ を選択し、これらの点において、定まった大きさの変位 δ を面に垂直な方向に課すことで、ピンチに相当する境界条件を実現している。なお、他のメッシュの形状（三角格子）や異なるメッシュサイズ、格子点数に対して同様の計算を実施し、以下に示す計算結果の収束性と一様性を確認している。

深いシェル $W/R = 5\pi/6$ に対してピンチを加えたときの面外変形の z 軸方向への大きさを、2 次元の sz 平面に投影したカラーマップが図 4.18 である。これを見ると、ピンチした箇所では径方向の負の方向に変位し、シェル中央では正の方向に変位していることがわかる。また、その大きさは中央部分では端近くと比べるとかなり小さい値を持つことがわかる。閉じた円筒では楕円形に変形し、中央とピンチした箇所での面外変形の絶対値はあまり変わらない [68]。開いたシェルでは、自由境界付近でほとんど伸びない変形が起こるため、変形の様子は閉じている場合とは異なることが理解される。

ピンチした断面の位置 $s = \pm W/2$ 、あるいは $s = \pm \pi R/w$ における x 方向の変位の z 方向への変化のプロファイルを図 4.19 に示す。これをを見ると、 $u_x(z)$ は振動しながら指数

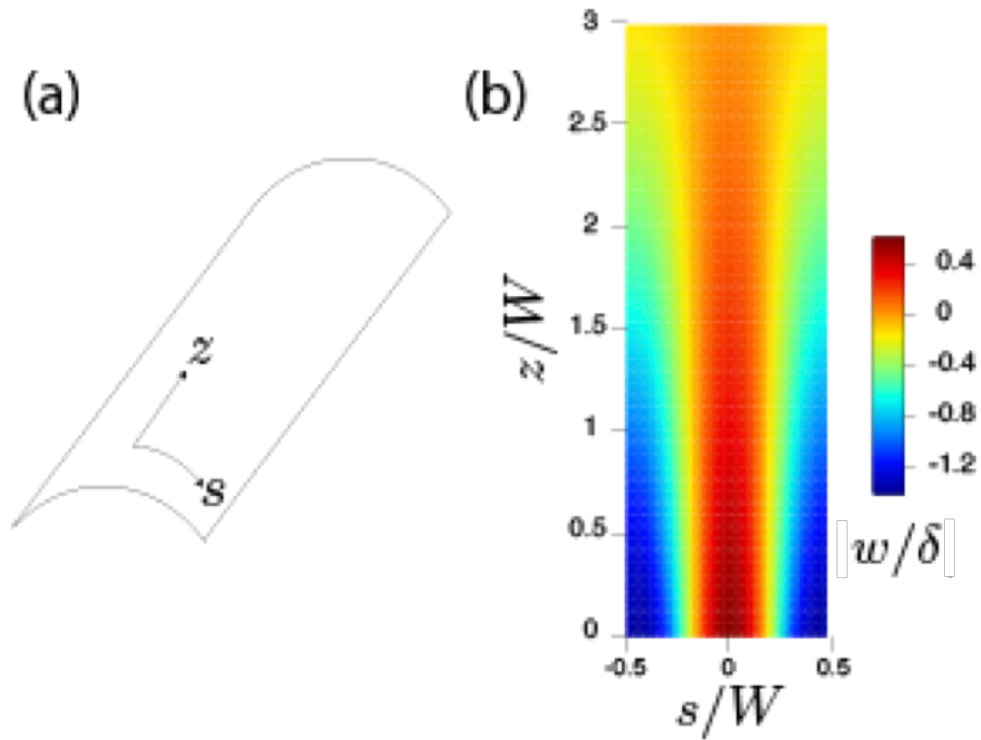


図 4.18. シェル全体の変位を 2 次元に射影した図。赤が外へ飛び出す方向の変位、青が内側への変位を示す。ピンチしたところからシェルの境界のあたりは変位が負になるのに対して、中央付近では変位は正になる。また軸方向に向かって減衰していく様子も見られる。ここでの幾何学的パラメータは $W/R = 5\pi/6$ 、 $t/R = 0.01$ である。

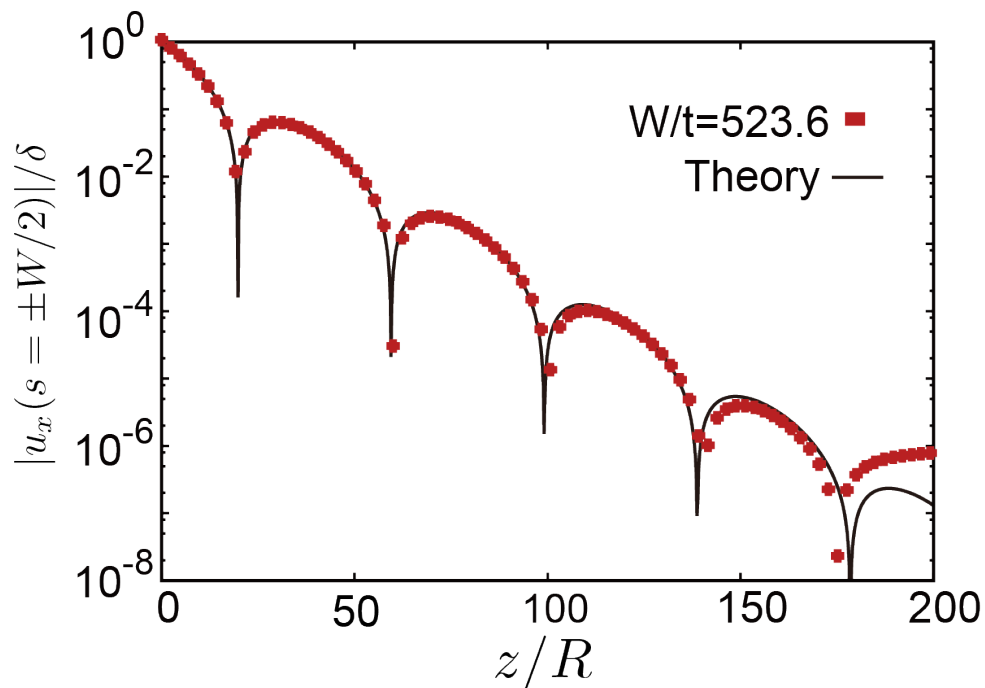


図 4.19. x 方向の変位をピンチの振幅 δ で、距離 z を曲率半径 R でスケールし、片 log でプロットしたグラフ。指数関数的に減衰しながら振動している様子が見られる。これは理論的な予測式 (4.81) とよく一致している。

関数的に減衰していることがわかる。これが理論的な予測と一致していることは後述する。 z が大きいところでわずかに理論的な予測とのずれがあることが確認できるが、これは主に片 log プロットによる値の見え方のためである。 $z/R > 150$ では $u_x/\delta < 10^{-6}$ であり、このレベルでは計算精度の限界が影響する。ほかにわずかにずれる原因としては、系全体がわずかに傾くという事情もあるが、そのどちらも回復長の評価に影響を与えるほど大きな問題ではない。

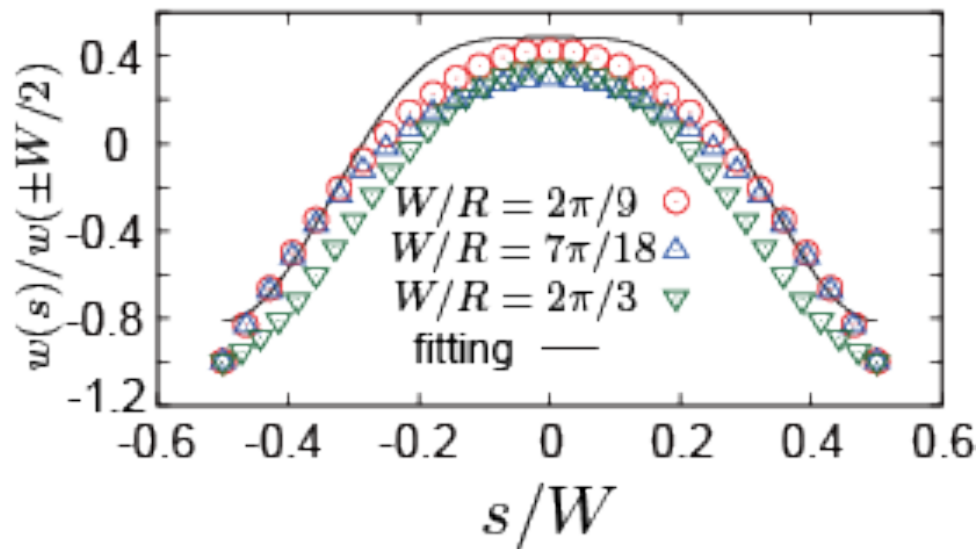


図 4.20. ピンチした付近のシェルの断面の形状を、異なる深さ $W/R = 40^\circ, 70^\circ, 120^\circ$ でプロットしたグラフ。実線は $A \cos(2\pi s/W) + A/4 \cos(4\pi s/W)$ でフィッティングした線である。ここで定数 A はフィッティングで決定するパラメータ。

ピンチした付近のシェルの断面の形状を、異なる深さでプロットしたものが図 4.20 である。後に議論するが、断面の形をフーリエ級数の形に展開したとき、支配的なモードは最初の 2 つ、 $A \cos(2\pi s/W) + A/4 \cos(4\pi s/W)$ である。図 4.20 に示す実線がこの最初の 2 つのモードでフィッティングした結果である。ここで定数 A はフィッティングによって決定されるパラメータである。

ピンチ深さの振幅 δ が回復長に与える影響を調べた結果が図 4.21 である。同じ幾何学パラメータを持つシェルに対して、ピンチが小さい場合と大きい場合の 2 つの場合を比較している。得られた結果は、変形の回復長がピンチ深さの振幅 δ にまったく依存していないことを示している。これは先のスケーリング理論 (4.74) 式の予測に整合する。今回示す計算結果のほとんどは、ピンチ深さが $\delta/t = 1 - 5$ の範囲で得られたものであるが、 W/R が小さい極限以外は、十分に大きい振幅でも変形の回復長は変化しない。

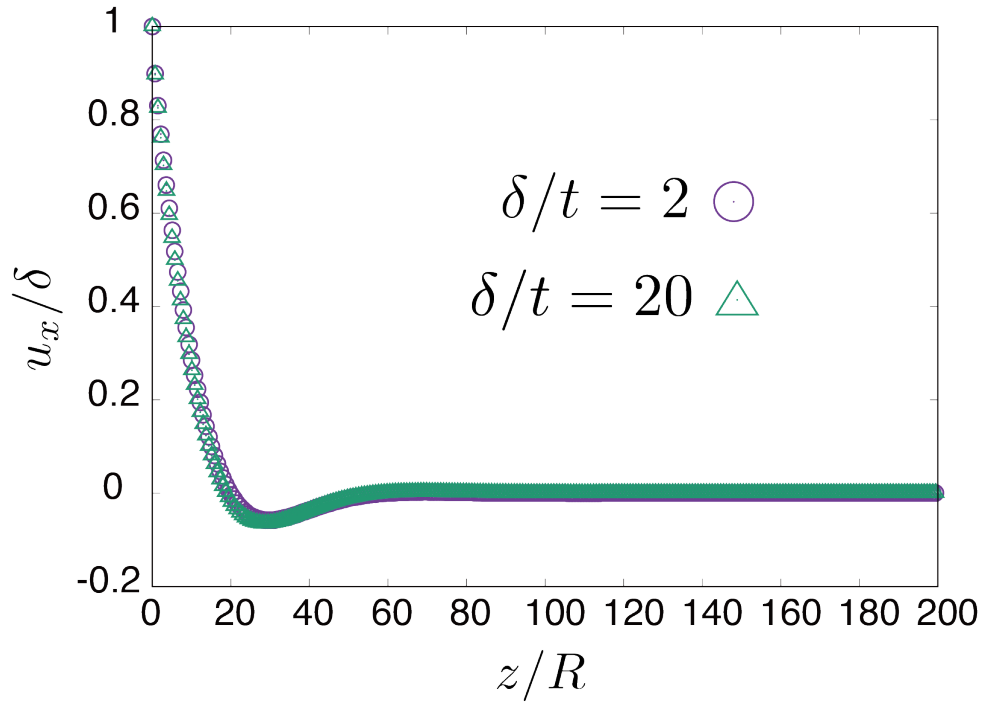


図 4.21. 同じ幾何学的パラメータを持つ円筒形シェルに対して、ピンチの振幅 δ が小さい時 $\delta/t = 2$ と大きい時 $\delta/t = 20$ では回復長は変化しない。ここで用いた幾何学的パラメータは $R/t = 100$ 、 $R/W = 5\pi/6$ である。

4.9 結果

ここまで、マクロ模型を用いた実験による形状計測と、構造解析による形状予測によって、回復長にかんする多数のデータを取得してきた。最後に、様々な R, W, t の組み合わせに対して得られた回復長 l_s の数値データを、スケーリング理論による予測 (4.74) 式にしたがってスケーリングプロットしたものを図 4.22 に示す。まず、この図に示す結果は、異なる手法による結果はすべて互いに整合的であり、われわれのこれまでの議論が、疑問の余地なく物理的に正しいことを説得力のある形で示している。ここで、もともとのスケーリング理論が浅いシェルを想定して導かれたものであることを思い出すと、この一致は $0 < W/R \ll \pi$ の範囲で得られることが期待されていたものである。図 4.22 は、この期待の実証に加えて、さらに二つの興味深い領域が存在することを示唆する。まず最初に、 l_s/W は $W/\sqrt{Rt} \rightarrow 0$ の領域で、回復長が一定値 $\sim 1/\pi$ をとるといふふるまいに注目する。この特徴的なプラトー領域は、次のように理解できる。我々は十分に薄いシェルを考えているので、この領域では、 $W/R \ll \sqrt{t/R} \ll 1$ 、という条件が成立する必要がある。これは自発曲率が消える極限であるといえる。この極限では、ピンチの振幅は十分に小さく、とくに $\delta < t$ では、面に沿った伸縮のひずみは完全に無視できる。一方、曲げ変形の緩和はこのとき差し渡し W の長さで起きるはずであるが、これはいまやこの系で唯一の長さスケールとなる。より詳しく

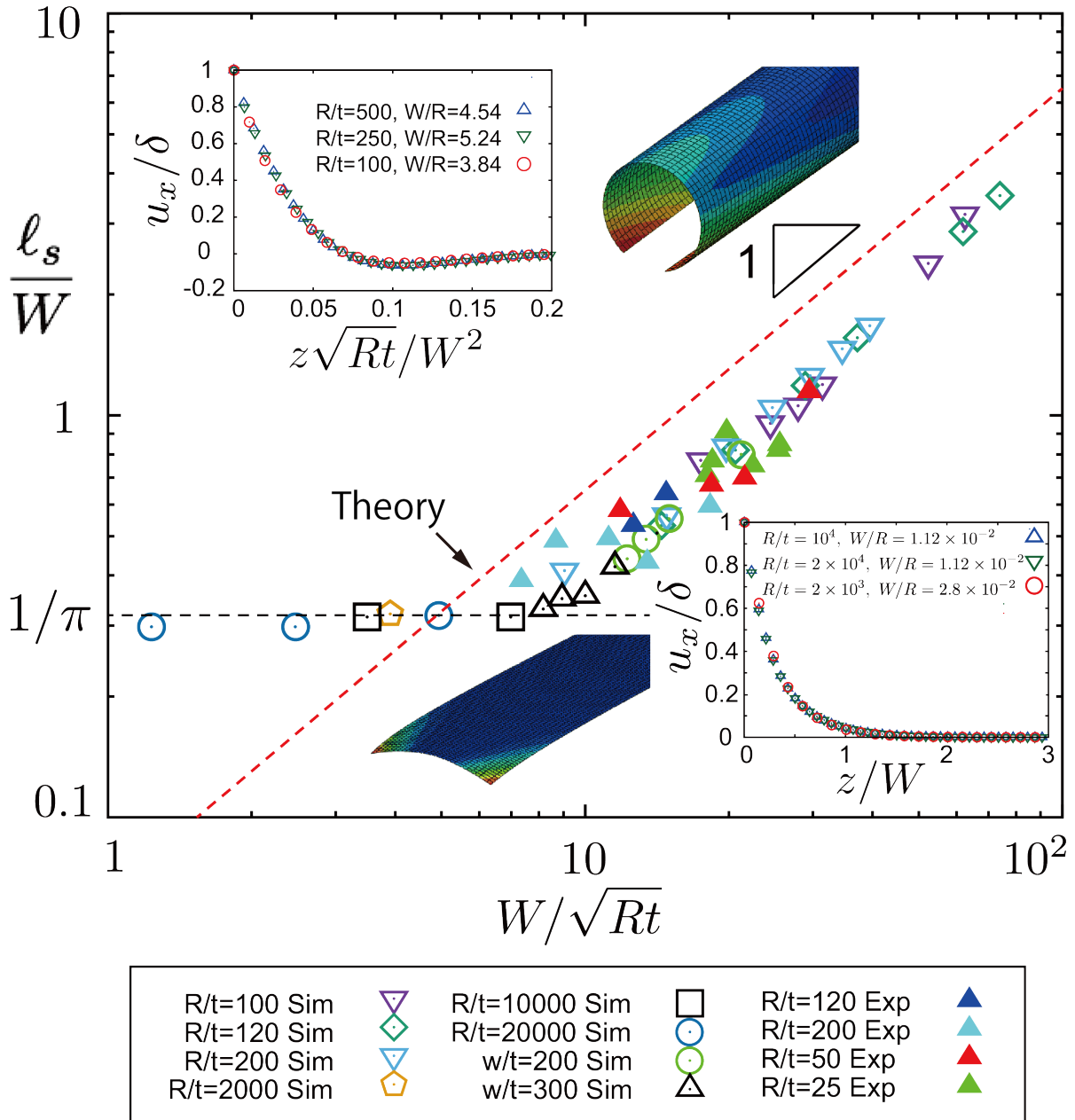


図 4.22. 実験と数値計算のデータを合わせた、開いたシェルの回復長のスケールリングプロット。幅 W 、曲率半径 R 、 t をさまざまな値で回復長を数値的、実験的に求める。中抜きシンボルは数値計算のデータで、塗りつぶしたシンボルは実験のデータである。赤い波線は理論曲線である。得られた結果は理論曲線とよく一致している。また横軸 W/\sqrt{Rt} が小さい領域では回復長が一定の領域が見られた。この領域は R が大きい領域で曲率の効果がきかない。板の純粋な曲げ変形のみを考えると、回復長 W/π を得ることができる。2つの inset の図は、いくつかのパラメータで一定の領域とスケールしている領域のそれぞれの変形のプロファイルをスケールプロットしたものである。これらを見ると2つの領域で変形のプロファイルはよく一致していることが観察される。

述べると、自発曲率が無視できるとき、薄板の変形は Kirchhoff-Love 方程式 $\nabla^2 \nabla^2 w = 0$ で記述される (付録の (B.185) 式を参照)。平坦な板の極限では、板の両端 $s = \pm W/2$ における面外変形は消失し、面内圧縮のみが残る。したがって、境界条件は $w(s = \pm W/2) = 0$ である。さらに、これらの端はつねにモーメントフリーであるので、 $s = \pm W/2$ において $\partial_s^2 w = 0$ が満たされなければならない。これらの境界条件を満足する解のうち、もっとも簡単なものとして

$$w(s, z) = (A_0 + B_0 z) \exp(-\pi z/W) \cos(\pi s/W) \quad (4.87)$$

がある。ここで A_0 と B_0 は積分定数であり、上述の境界条件を満たすように決められる。しかし、これらの詳細にかかわらず、(4.87) のかたちから、ただちに $l_s \sim W/\pi$ が結論される。図 4.22 の右下のインセットは、この領域のシェルの変形はたしかに W のみでスケールし、 R や t には依存していないことを示している。

図 4.22 に対する、もうひとつの観察結果はさらに重要である。式 (4.74) のスケーリング則は、当初予想していた領域 $W/R < \pi$ をはるかに超えて成立することを図 4.22 は示している。そして $W/R \sim 2\pi$ に及ぶまで妥当であることがみてとれる。さらに、図 4.23(a) に示されているように、我々の回復長は、パイプの回復長 $l_{\text{pipe}} = 0.7R^{3/2}/t^{1/2}$ を $W/R > \pi$ の領域では大きく凌駕する。(このスケーリング関係式は我々の独自のシミュレーションで再現したものであり、図 4.23(b) に示している)。これは、いくらか予想外の結果であるといえる。ところで、ここまでの議論は、ピンチする箇所に近い、シェルの側面で測った回復長 l_{pipe} についてであった。一方、完全な円筒と比較しているのは十分に深いシェルであるから、ピンチ点付近から最大限離れたところにあるシェル中央部で計測した回復長 l_c については、 l_{pipe} に対するものと同じふるまいがみられるどうか、わからない。そこで、この点を明らかにするために、深いシェルに対する中央の変形の回復長 l_c のデータを、図 4.23(c) にスケーリングプロットする。すると、またもや、我々のデータは式 (4.74) のスケーリング則を支持することが確認できる。したがって、我々の数値計算と実験データはどのような領域においても、式 (4.74) のスケーリング則とその頑健性を示唆する。すなわち、任意の深さの開いた円筒形シェル全体で、拡散的な変形はたったひとつの長さスケール (4.74) に支配されていることがわかる。

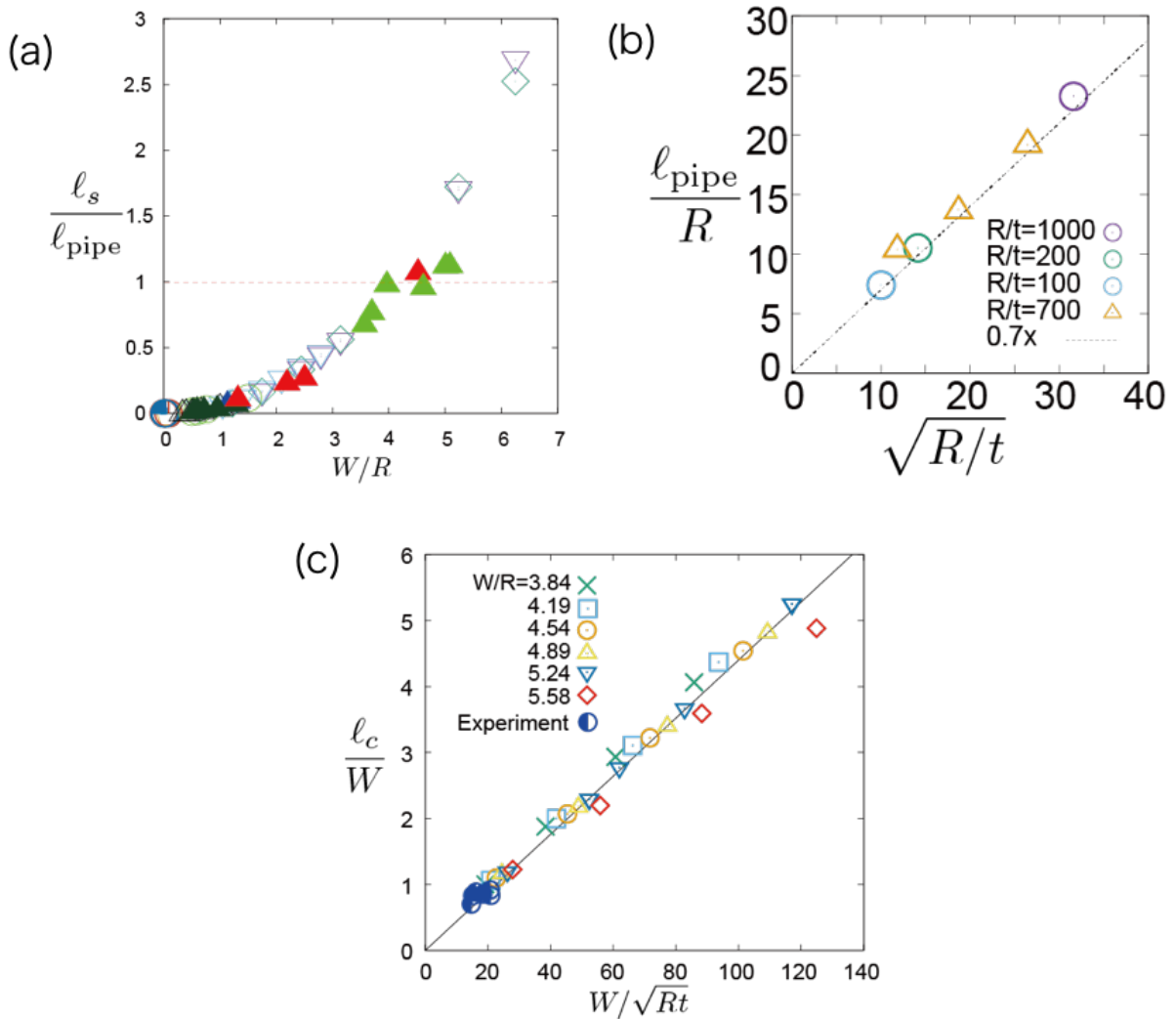


図 4.23. (a) パイプと開いた円筒シェルの回復長の比較。縦軸は長さの比で、横軸はシェルの深さを表している。シンボルは先ほどと同じパラメータセットである。開いた円筒形のシェルは深くなるにつれて、 $W/R = 4 - 5$ 付近でパイプの回復長と同じ長さになり、それより深くなるとパイプの回復長を大きく超える。同じ値になる時は、得られる伸びと曲げのエネルギーの比が数係数を含めて同じになる場所である。(b) 閉じた円筒の回復長のスケールングプロット。データは全て Abaqus による数値シミュレーションのデータを用いた。計算では円筒の半径は $R = 1$ で固定して、様々な厚み t の時の円筒をピンチした時の回復長を求めた。(c) 開いた円筒シェルの中央部分のスケールングプロット。中央付近の変形の回復長は円筒のスケールング $R^{3/2}t^{-1/2}$ [68] が現れると考えていたが、実際はこちらも開いた円筒シェルと同じスケールング則にしたがっていた。

4.10 考察

前節までの議論で、シェルの深さにかかわらず、式 (4.74) のスケールング則が普遍的に成立する、という事実をみてきた。直観的には、これはいくらか意外な結果に感じられるが、実は、以下に示すように、弾性シェルの持つ一般的な特性から理解することが可能である。

一般的に、薄いシェルの変形の仕方は、それをシェル自身のサイズと同程度のスケール $\sim L$ で観察するかぎり、集中外力をどのように加えるか、どの程度加えるか、といった詳細にはあまり依存しない。もちろん、インデントする（集中力を加える）場所のごく付近（典型的にはシェルの厚み程度の距離：near field）では、シェルの伸縮変形は顕著であり、その変形の仕方は集中力の加え方に強く依存しうる。ところが、一旦その領域から十分離れる（far field）と、（これまでずっと議論してきたように）曲げ変形が支配的になり、その様子はある種の普遍的な構造を持つようになる。このような一般的な知見は、これまで、十分に対称性のたかい閉じた円筒面および球面、あるいは無限に広がった曲面、などに対して獲得されてきたものである。今回我々が得た結果は、このような性質が自由境界を持つシェルに対しても、同様に成り立つことを示唆する。そこで本節では、shallow shell theory の漸近解析を実施することによって、これらの考察の妥当性を検証する作業にあてることにする。

4.10.1 漸近解析

Shallow shell theory は、薄板の変形を記述する非線形偏微分方程式 Foppl-von Karman 方程式に弱い自発曲率の効果を取り入れたモデル方程式であり、しばしば Donnell-Mushtari-Vlazov(DMV) 方程式の名前で呼ばれる（付録の式 (B.183) 参照）。弾性シェルの完全な力学平衡を記述する方程式を、一般の計量と曲率場に対して共変なかたちに表現することは可能である。しかし、これを解析的に扱うことは、完全な球対称性や軸対称性が保証されるような、きわめて限られた場合にのみ可能である（それでも、非自明な厳密解というものは、いまだにひとつも発見されていない）。他方、これら強い非線形性を持つ方程式系を、弱い自発曲率と弱い変形の仮定のもとに段階的に線形化することで、物理的にも重要な知見を得ることが可能になる（場合がある）。とくに、集中力に対するシェルの応答を、近距離場と遠距離場に分離すると、遠距離場における重要な特徴は、（その大域的な性質を反映して）線形化した方程式系から汲み取ることが可能である。以下では、まず DMV 方程式を導入し、つぎに各変数を適切に rescale することで、遠距離場のふるまいを近距離のそれから分離する。

変位ベクトルを $\mathbf{u} = w\hat{\mathbf{e}}_r + v\hat{\mathbf{e}}_\theta + u\hat{\mathbf{e}}_z$ とする。ここで u, v は面内での変位、 w は面外への変位である。自発曲率を $1/R$ とすると線形化された DMV 方程式は

$$\begin{aligned} D\nabla^2\nabla^2w - \frac{t}{R}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} &= f_{\text{ext}} \\ \frac{1}{E}\nabla^2\nabla^2\phi + \frac{1}{R}\frac{\partial^2w}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \quad (4.88)$$

となる（付録の式 (B.183)）。ここで f_{ext} はピンチ点での外力（法線成分）であり、

$$f_{\text{ext}} = -F[\delta(s+W/2) + \delta(s-W/2)]\delta(z) \quad (4.89)$$

と表現できる。ここで図 4.18(a) に描いているように、断面方向に沿って s 、長軸方向に z

と定義されている。また断面方向にはシェルの中央で $s = 0$ 、境界で $s = \pm W/2$ としている。 $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。

近距離の現象との分離を行うため、変数を次のように無次元化する：

$$\tilde{s} = s/W, \quad \tilde{z} = z/\xi, \quad \tilde{w} = w/a, \quad \bar{\phi} = \phi/\Phi \quad (4.90)$$

ここで

$$a = \frac{RW^3}{D\xi}, \quad \Phi = \frac{EFW^7}{DR\xi^3} \quad (4.91)$$

である。特徴的長さ ξ はこれから決めるパラメータであるが、(数係数を除いて) l_s と一致すると期待することができる。また摂動の展開パラメータとして

$$\epsilon = \left(\frac{DR^2}{EtW^4} \right)^{1/2} \ll 1 \quad (4.92)$$

を導入する。これらの無次元量をもちいて式 (4.88) を書き直すと

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \nabla_\alpha^2 \nabla_\alpha^2 w + \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= \epsilon^2 f_{\text{ext}}, \\ \nabla_\alpha^2 \nabla_\alpha^2 \phi - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \quad (4.93)$$

を得る。ここで $\alpha = W/\xi$ は新しく導入する微小パラメータである。また $\nabla_\alpha^2 = \partial_s^2 + \alpha^2 \partial_z^2$ と定義する。(4.93) およびこれ以降で、無次元化された変数の上につける記号 $\tilde{}$ は煩雑になるので省略することにする。

いま、 ϵ を有限の小さい値に留めたまま、 $\xi \rightarrow \infty$ とする極限を考えると、(4.93) より、Kirchhoff-Love の板方程式 $\partial_s^4 w = f_{\text{ext}}$ が得られる。 $\xi \rightarrow \infty$ では、長軸 (z) 方向に一様な変形が実現するため、本質的に断面にかんする 1 次元の方程式に帰着する。もっと一般的な場合には、曲げと引っ張りの項がバランスするはずなので、(4.93) 式の左辺の第 1 項と第 2 項は同じオーダーになることが要請される。すなわち、 $\epsilon^2 = \alpha^4$ より

$$\alpha = \epsilon^{1/2} \quad (4.94)$$

を得る。ここから直ちに $\xi \sim W^2/\sqrt{Rt} \sim l_s$ となって、が期待されるスケーリング則が確認できる。

式 (4.93) において、最低次のオーダー ϵ^2 までの項を残すと、 $\nabla_\alpha^2 = \partial_s^2 + \epsilon \partial_z^2 \approx \partial_s^2$ であるから、このオーダーまでの支配方程式は

$$(\partial_s^4 \partial_s^4 + \partial_z^4) w = \partial_s^4 f_{\text{ext}}, \quad (4.95)$$

となるのがわかる。境界条件は $z = 0$ の両端をピンチする条件とエッジ (自由境界) でのモーメントフリー条件は

$$w(s = \pm W/2, z = 0) \approx -\delta \quad (4.96)$$

$$\partial_s^2 w(s = \pm W/2, z > 0) = 0 \quad (4.97)$$

である。境界条件 (4.97) を考慮して、(4.93) の解を次のフーリエ級数展開

$$w(s, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z) \cos(2n\pi s/W) \quad (4.98)$$

のかたちに求めてみることにする数値計算の結果から、最初の 2 つのモードを考えれば十分であることが示唆される (図 4.20 を参照のこと)。そこで (4.98) において、 $n = 1$ および 2 のモードまでを残すと、境界条件 (4.97) の 2 番目から $\psi_1 + 4\psi_2 = 0$ が得られる。一般に、指数的に減衰する関数の重ね合わせでは、一番減衰の遅いモードだけで全体をかなりよく近似できる。そこで、 $w \approx \psi_1(z) \cos(2\pi s/W)$ を、式 (4.95) に代入すると

$$\left[\partial_z^4 + (2\pi)^8 \right] \psi_1(z) = 0 \quad (4.99)$$

を得る。ピンチした領域 $z = 0$ から z が増えるにつれて、 w が減衰するような解を選ぶと、

$$\psi_1(z) \sim \exp(-z/\ell_s) \cos(z/\ell_s) \quad (4.100)$$

を得る。ここで回復長 ℓ_s は数係数まで含めて

$$\ell_s = \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} \xi = \left(\frac{3(1-\nu^2)}{16\pi^8} \right)^{1/4} \frac{W^2}{\sqrt{Rt}} \quad (4.101)$$

と求めることができる。式 (4.101) の予測は、図 4.22 にプロットされており (赤い破線)、完全ではないものの、我々の実験および数値計算のデータと満足のいく一致を示している。

さて、ここまでの回復長にかんする理論的解析をもとにして、我々のシェルが示す stretching structure の性質を調べておこう。軸方向と周方向の面内応力 σ_{ss} と σ_{zz} を Airy 関数のスケーリング則から見積もると

$$\sigma_{ss} \sim \partial_{zz}\phi \sim \Phi/\ell_s^2 \sim \frac{FR^{3/2}}{t^{1/2}W^3}, \quad (4.102)$$

$$\sigma_{zz} \sim \partial_{ss}\phi \sim \Phi/W^2 \sim \frac{FR^{1/2}}{t^{3/2}W} \quad (4.103)$$

である。これからただちに

$$\sigma_{zz}/\sigma_{ss} \sim \frac{W^2}{Rt} = \epsilon^{-1} \sim \frac{\ell_s}{\sqrt{Rt}} \gg 1, \quad (4.104)$$

という大小関係を見いだすことができる。ここで、 \sqrt{Rt} はシェルの力学で普遍的に出現する長さスケールであり、近距離での変形の侵入長 (あるいは境界層の厚さ) を特徴づける。したがって、円筒の長軸方向のひっぱり応力 σ_{zz} は、周方向の引っ張り応力 σ_{ss} に比べてずいぶん大きくなるのがわかる。これは、もともと平坦な (z) 方向へ伸縮が発生するのは非線形効果であるのに対し (つまりこの方向のひずみは小さくとどまる)、もともと曲がっている方向 (s) に沿って伸縮が発生する場合には大きな弾性変形のエネルギーコストが伴う

ためである。自発曲率を持つ方向への変形は、典型的に、特徴的長さ \sqrt{Rt} 程度で減衰し、シェル全体としては、この方向へは大きなひずみが生じないような変形が実現する。

以上の議論は、ピンチの振幅 δ が円筒の半径 R に比較して十分小さいかぎり、任意の深さのシェルに適用可能であり、ピンチする正確な場所やピンチのくわえ方にも依存しない。したがって、ここで行なった考察は、任意の深さの円筒形シェル全体で拡散的な変形がたったひとつの長さスケール (4.74) に支配されている事実を、理論的に裏付けるものであるといえる。

4.10.2 シェルの振動的な振る舞い

これまでの結果から、断面方向に曲率を持つシェルの場合、変位場は振動しながら指数関数的に減少することが明らかになった。集中力を加えた場所の断面は楕円的に変形するが、この楕円は軸方向に回転しながらその変位振幅が減少していくことを意味する。これは少し直感に反するような観測結果であり、物理的な説明を要する。一方、シェルが十分浅く、平坦な板とみなせる極限では、変位場が単調に指数関数的に減衰することもわかった (式 4.87)。このふたつは定性的なふるまいが異なっているが、それはシェルの変形における面内の stretch の有無による。

まずピンチした (集中力を印加した) 場所では、シェル断面はもっとも大きく変形している。うゑに述べたいずれの場合でも、ピンチ点から離れるとともに、断面はもとの形状に戻っていく。したがって z 軸上のある場所での断面の曲率分布 (つまり形状) は、そのすぐそばの場所 (たとえば軸上で dz だけ離れた場所) での断面の曲率分布とは異なっている。すると、いま注目している二つの断面にはさまれた (仮想的な) 幅 dz の薄いシェルのストライプは、必然的に引っ張りを受けることになる。もし、薄板の自然状態が平坦な面であるならば、この面のひっぱりひずみによるエネルギー増加は非線形の寄与であり (Foppl-von-Karman 方程式を参照)、変形の振幅が小さいかぎり、線形のふるまいには影響を与えない。したがって、この場合は、式 (4.87) でみたように、断面の変位場は指数関数的に減少することが理解できる。

一方、シェルの自然形状が自発曲率を持つ場合、ひっぱりひずみによる弾性エネルギー増分は線形のオーダー (エネルギーの表式はひずみの 2 次形式) であり、曲げ弾性のエネルギーと同程度のオーダーである。この引っ張りのエネルギー増加は、両側の断面の形状をなるべく同じにするように作用する。つまり、断面の形状が軸方向に変化するのを妨げ、断面が奥行き方向 (z 軸方向) に一様に変形することを要求する。もちろん、実際に断面が一様に変形すると、シェルが軸方向に長くなるほど、曲げ弾性変形のエネルギーが際限なく大きくなる。このように、曲げ弾性エネルギーを下げようとする作用と引っ張り弾性エネルギー

を下げようとする作用の競合の結果として、特徴的な長さとしての回復長が決まる。ふたつの効果は、力の表式でみると z にかんする微分が2階だけ違っていることからわかるように、ちょうど位相が 180° だけずれて作用する。すなわち、ひっぱり弾性による作用は、ある種の復元力のようにはたらくので、空間的な振動現象があらわれる、と理解することができる。

4.10.3 植物の葉との関連性

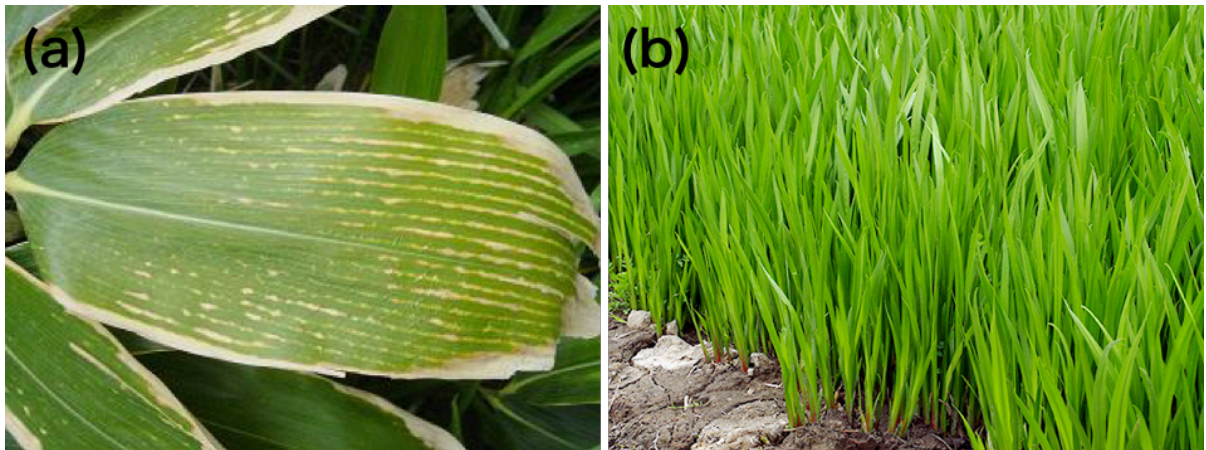


図 4.24. 単子葉植物の葉の例：(a) 笹の葉 (b) 葉ショウブ

ここまでの議論で得られた我々の結論は、均一で等方的な弾性体に対する基本的な性質にかんするものであり、均一で等方的な材質からなる構造物であれば、それが人工物であれ自然界のものであれ、同じ結論が適用できる。とりわけ、今回注目したような細長い円筒形シェルは、おもに単子葉類の植物の葉にみることができ。しかし、実際の植物の葉は等方的な弾性体であるとは限らない。多くの場合、植物の葉は葉脈と呼ばれる細管のネットワーク構造を持つ。これらの葉脈が通る部分は、葉の他の部分よりも若干、太くなる。また、中央に一番太い葉脈が存在し、そこから枝分かれ状もしくは並行して細かい葉脈が並んでいる。つまり、多くの植物の葉は、細長く硬い管が網目状につながり合ったものを、薄い膜で両側からサンドイッチしたような構造になっている。このため、単子葉の葉は全体として、葉脈に沿った方向には硬く、垂直な方向にはそれより柔らかくふるまう。以上の観察から、葉は、剛性率に異方性を持つ弾性体とみなすほうが妥当である。このような単純な異方性をもつ理想的な弾性体に対して、我々の結果を拡張してみる。完全に異方的な弾性体の円筒形シェルを考える。軸方向の弾性率を E_{\parallel} 、断面方向を E_{\perp} とする。すると、これまで議論してきたスケーリング理論において、曲げエネルギーのヤング率を E_{\perp} 、伸びエネルギーのヤング率を E_{\parallel} で置き換えればよいことがただちにわかる。そこから見積もられる回復長は

$$\ell \sim \frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}} \frac{W^2}{\sqrt{Rt}} \quad (4.105)$$

となる。これより、異方的な弾性体を考えると、回復長はもはや幾何学的なパラメータのみで決まる長さではなく、弾性率の比 E_{\parallel}/E_{\perp} に依存して変化することがわかる。多くの単子葉の植物では、軸方向に硬く、断面方向に柔らかい（と推測される）ため、おなじ形状を持つ等方弾性体に比べてより長い回復長が得られる、と期待される。（ここで、それらの絶対的な剛性の大小には依存しないことに注意。）

一般に、植物器官（葉、茎、根、花卉など）の形態形成やその維持は、複雑な成長制御と物理的環境、膨圧や栄養条件など、さまざまな要因に支配されており、単純な力学的側面だけからなんらかの結論を断定することはできない。それに加えて、回復長の大小と、重力や風に対する葉の力学的剛性や安定性との間の関係も、決して単純ではない。（回復長が大きいことが、ただちに葉の構造安定性や柔軟性を意味するわけではない。）とはいえ、ここで明らかにした簡単な物理的性質は、その単純さゆえ、おおくの単子葉植物に当てはまる事実であり、こういった力学的特質がもつ生物学的な利点や役割を考えることは、植物のメカニカルデザインを考える上で、ひとつの有益なアプローチを提供するはずである。（実際に、植物の葉の断面の形状とその力学的な効果を調べた研究は数多く存在しており、古くは19世紀にさかのぼる [73–76]。）

4.11 まとめ

本研究において、我々は開いた円筒形の弾性シェル的一端をピンチした際の変形の様子を調べ、その回復長のスケーリング則を確立した [64]。この結果は、模型の作成、変形の計測実験、有限要素法による数値シミュレーション、スケーリング理論、弾性論に基づく解析理論、の全て組み合わせて得られたものである。得られた回復長は、完全な円筒 [71, 77] と平坦なリボン [48] の結果の一般化と考えることができる。円筒の曲率半径 $R \rightarrow 0$ の極限では、我々の結果は平坦な板の結果 [48] に一致する。しかしシェルの幅 W が $2\pi R$ に近づく純円筒の極限 $W \rightarrow 2\pi R$ でも、先行研究の円筒に対するスケーリング則には一致しない。これは、自由境界があるかないかの差である。 $W = 2\pi R$ の場合でも、我々の系は長軸に沿って切れ込み（スリット）が入った形状をしている。その場合、シェル内部に生成する応力場が異なるために、閉じた円筒のスケーリングにはならず、依然として開いた円筒形シェルのスケーリング則を満たす。完全な円筒では断面が対称な変形をするのに対し、切れ込みがあると自由境界のあるなしでこの対称性が破れる。つまり、閉じた円筒では長さスケールが半径 R しか存在しないが、開いた円筒シェルでは独立な長さスケールとして幅 W と半径 R の2つが存在する。これが2つの系の大きな違いであり、材質は全く同じでも、幾何的な差異（形状や境界条件）によってその変形の様子は大きく異なることを意味する。

さらに、弾性率の異方性を考えることで、植物の生存戦略についても考察した。植物は異方性を持ち長軸方向に強化されることで、さらに長い回復長を持つ。これは、植物の葉っぱが重力に抗してより高い位置まで成長することを目指したために獲得されてきた物理的性質と推測することも可能である。ただし、植物の葉の形は他の様々な要因（成長や水分量、天候など）により強く依存しており、力学的な条件だけから強い結論を引き出すことはできない。

今回の研究で明らかになった弾性体シェルの基本的な特性は、工学的な応用を考えるうえでも、潜在的に有用な結果である。しかし、今回明らかにしたのは、つまるところ、シェルの「線形応答」にかんする性質である。より実際的には、これらの構造の大変形時のふるまいについて詳しく調べることが不可欠である。

4.12 展望

開いた円筒形シェルの両端を持ち折り曲げていくと、最初は長軸方向に一様な曲率を持ってたわむ。このとき、断面方向の曲率は徐々に小さくなっていく（断面は平坦に近づいていく）。この断面内の変形は、長軸の曲げが小さいときには、シェルに沿ってほぼ均一に進行する。さらに曲げていくと、やがて曲げは一箇所に局在化し、その狭い領域で鋭く折れ曲がるようになる。そして、両側の領域はほとんどたわみのない直線的な形状を回復する。このとき、長軸に沿って強く曲がった局在領域では、シェルの断面はほぼ平坦になるまで変形する。

同じことを閉じた円筒シェルで行うと、先にも述べたように Brazier 不安定性を示し、シェルは2つの鋭い角を形成し、そこをヒンジのようにして折れ曲がる。これは localized buckling（局所座屈）と呼ばれ、座屈不安定性とともに材質が弾性限界を超えて断面が潰れる現象である。つまり、鋭い角 (ridge) が発生した箇所は塑性変形を起こしており、外力を取り除いて元に戻してもその跡が残る。これとは対照的に、開いた円筒形シェルでは、このような応力集中とそれにとともなう弾性限界は発生せず、シェルは滑らかに可逆的に変形する。またメジャーテープの巻き取るときのように、ある曲率半径に円筒形シェルを巻きつけていった場合でも、シェルは断面が全ての領域で平坦になりながら、ある曲率半径をもって収納される。このように収納したとしても、円筒形シェルは破損することなく、拘束を外すと元のかたちを回復することができる。

円筒形シェルを曲げていったときも、Brazier 不安定性の時と同様にモーメント-曲率曲線は最初は線形に応答するが、やがて線形の応答は示さなくなり、曲率が大きくなったところで大きく下がるという、似たような傾向がみられる。さらに円筒形シェルは、上下の非対称性により、曲げる方向によって応答が変化する。円筒形シェルの断面の円弧の中心の方向に折り曲げていくと、モーメントカーブは滑らかに変化していき、曲率が局在化したところで急激に下がる。これに対して、同じシェルを逆側に折り曲げていくと、最初は同様なふるまいをみせるが、あるところでスナッフ座屈を起こす。これはメジャーテープを曲げたときにパキッと音がすることからもわかる。また、半円筒のシェルの場合、たわみが局在化していく過程でねじれを伴う変形がしばしば現れる [78, 79]。シェルの両端と中央を3点支持の実験を行うと、このねじれパターンがしばしば現れる。同様の現象は数値シミュレーションにおいても確認することができるが、左右どちらにねじれるかはあらかじめ決まっているわけ

ではないため、自発的な対称性の破れの一例であるといえる。これは円筒形シェルの曲げを行なった際に、円筒断面内に圧縮と引っ張りを受ける部分があられるが、ななめにねじれて曲がることで面内の伸縮を減らし、ほとんどの変形を曲げだけで担うことができるようになるためである、と考えられる。円筒形シェルの曲げの局在化を完全に理解するためには、このねじれ変形についても詳しく調べる必要がある。このように、開いた円筒形シェルでは、閉じた完全円筒にはみられないような多彩な力学応答が観測される。これらの現象を力学の視点から深く理解するためには、より詳細な非線形の解析が必要である。ここで「非線形解析が必要」というとき、それは材質の弾性限界を超えない限り、構成関係式は線形（フック則）で十分であるが、変位振幅の増大にともなってますます幾何学的な非線形性が重要になってくる、ということの意味する。

円筒形シェルは、展開収納可能な支持および骨組み構造として、宇宙工学などで盛んに研究されており、類似（あるいはより多様な）機構は生物界にも数多くみいだすことができる。自由境界を持つこのタイプのシェルのふるまいを完全に理解することは、新たな工学的な応用や、生物に対する理解を深めるとともに、幾何学と力学の相互作用によって、よりしなやかで多彩な力学応答を示す薄板やシェルのデザイン原理を明らかにすることにつながるであろう。

付録 A

3次元の弾性体

我々はまず3次元の弾性体の釣り合いの方程式を導いていく。はじめにひずみを定義し、両立性の関係式などを求めていく。その後応力を定義し、構成関係式を導いていく。そして弾性体の変形のエネルギーがどのように表記されるのかを示す。

A.1 弾性体とは

我々は3次元空間中に広がった均質な物体を弾性体と呼ぶことにする。弾性体と呼ぶ物体自体は原子・分子 (10\AA 程度の大きさ) の集まりであるが、物体の典型的なサイズ l は

$$l \gg \text{原子・分子サイズ}$$

であるとする。ただし、物体が元の形に戻ろうとする力 (復元力) は原子・分子由来である。また、ある状態で安定していることを前提とする (すなわち、系は力学的平衡および熱平衡にあるとする)。そして、外力を印加すると変形し、復元力を生じる。ここでの復元力は弾性内力が発生するためであり、それらは固体を構成する分子間の引力相互作用が起源となっている。しばらくすると、外力と復元力が釣り合った状態が実現する。その状態から外力を取り除くと物体は元の状態に戻る^{*1}。以上の性質を持つものを弾性体と呼ぶ。

A.2 弾性体の変形

弾性体は物体の形状を記述するための基準となる「配置」が存在する。物体の元の「配置」 (Reference frame configuration) からのズレを考えることで物体の変形を記述 (Lagrange 記述) する。変形前の配置を位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とすると、変形後の配置の位置ベク

^{*1} 例えば同じ連続体でも流体はもとの形状に戻らない。

トルは変形前の配置を用いて：

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x'(x, y, z) \\ y'(x, y, z) \\ z'(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

と表すことができる。これら 2 つの位置ベクトルを用いると変位ベクトル (displacement vector) $\mathbf{u}(r)$ は

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x'(x, y, z) - x \\ y'(x, y, z) - y \\ z'(x, y, z) - z \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

と表すことができる。弾性体の復元力はひずみテンソル (strain tensor) という量を用いて表現される。ひずみテンソルは物質の各点の近傍で物体の変形の割合いを表現する無次元量である。変位ベクトルが直接復元力を表現できない理由は、平行移動や剛体回転などの物体の変形が伴わない場合でも有限の値を持つので、復元力を直接表現するのには適していないからである。もちろんひずみテンソルは、変位ベクトルを用いて表現される。ひずみテンソルは元の形状から、変形後の形状までの変形具合 (元の大きさと変位の比) で表現される。具体的な表記は後述する。

A.3 2 つの近似

我々の当面の目標は薄い構造物の変形の理論を立てることである。そのために、本文 2 章でも述べたが、弾性体の理論でよく用いられる 2 つの近似 (approximation) を考える。この 2 つは一見するとよく似ているように感じられるが、本質的には大きく異なる。

(1) 微小ひずみ近似 (small strain approximation)

ひずみ (strain) と応力 (stress) は線形の関係式で表される。これは「Hooke の弾性体」(Hookean elasticity) としてよく知られている。弾性体は、無限に微小な線形バネ (Hooke のバネ) の無限個の集合であると考えることができる。これは線形弾性体と呼ばれ、ひずみと応力は線形の関係式で表される。局所的な剛体回転による幾何学的な非線形性をしっかりと考慮しなければならない。つまり幾何学的には非線形な取り扱いが必要である。

(2) 微小変位近似 (small displacement approximation)

幾何学的にも線形化される。この近似は計算は簡単になるが、物体はほぼ変形できない。したがって建築物などの耐久性を考える点では有用な手段ではあるが、大変形を考えるのには適さない。こちらはかなり厳しい条件であるため、基本的には (1) で近似する。

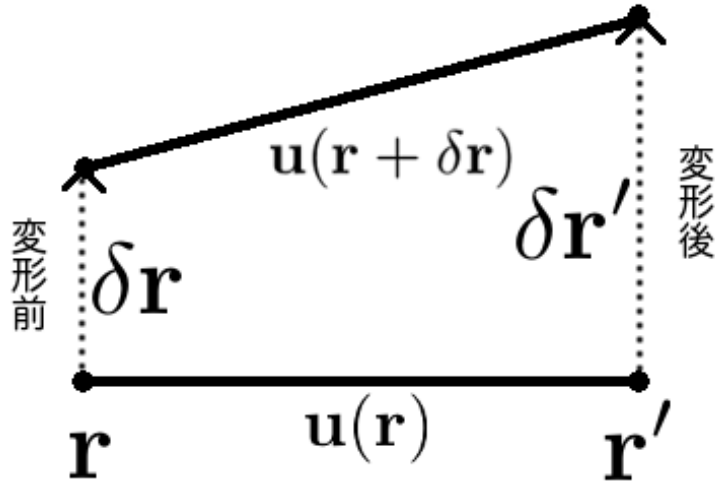


図 A.1. 変形時の 2 点間の相対位置ベクトルの変化。物体の局所的な変形を表す。

A.4 変形テンソル

物体の局所的な変形は、各点の周りでその近傍の二点間の相対位置ベクトルがどのように変化 (移動・回転・伸縮) するのかを意味する (図 A.1)。

変形前の物体のある点の座標を \mathbf{r} 、その近傍の点の座標を $\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$ とする。変形後の物体では、座標 \mathbf{r} は座標 \mathbf{r}' に移動し、その近傍の点の移動後の座標は $\mathbf{r}' + \delta \mathbf{r}'$ と表す。すると $\delta \mathbf{r}'$ は変位ベクトル $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ を用いて

$$\delta \mathbf{r}' = (\mathbf{r}' + \delta \mathbf{r}') - \mathbf{r}' = [\mathbf{r} + \delta \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r})] - [\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r})] \quad (\text{A.3})$$

と表すことができる。少し変形すると

$$\delta \mathbf{r}' - \delta \mathbf{r} = [\mathbf{u}(\mathbf{r}) + (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \dots] - \mathbf{u}(\mathbf{r}) \approx (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{r} \quad (\text{A.4})$$

となる。ここで $\mathbf{E} = \nabla \mathbf{u} = \nabla_j u_i = \partial u_i / \partial x_j (j = 1, 2, 3)$ を Cauchy の変形テンソルと呼ぶ。式 (A.4) は上述したように変形前と変形後の 2 点間の相対的な位置ベクトルの変化が、変形テンソルと変形前の相対位置ベクトルを用いて表されることを示している。従って、

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{r}, \quad (\text{A.5})$$

となるので、 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ならば $\mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ となり、これは剛体的な並進運動を表している。 E_{ij} は対称部分 S_{ij} と反対称部分 A_{ij} に分けることができる。 E_{ij} の添字の入れ替えに對して：

$$\begin{cases} E_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \\ E_{ji} = S_{ij} - A_{ij} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S_{ij} = \frac{1}{2} (E_{ij} + E_{ji}) \\ A_{ij} = \frac{1}{2} (E_{ij} - E_{ji}) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

となる。

A.5 ひずみ：幾何学非線形

変形テンソル E_{ij} は対称テンソル S_{ij} と反対称テンソル A_{ij} を用いて

$$E_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \rightarrow E_{ij}\delta r_j = S_{ij}\delta r_j + A_{ij}\delta r_j \quad (\text{A.7})$$

と表すことができる。ここで同じ添え字が出てきたときは和をとるというアインシュタインの規約を用いた。以後同様である。変形テンソルを式 (A.5) に代入すると

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{r} \quad (\text{A.8})$$

とかける。ここで右辺第1項は剛体並進、第2項は純変形、第3項は剛体回転を表している。

A.5.1 A_{ij} について

A_{ij} において $i = j$ とすると $A_{11} = -A_{11}$ より $A_{11} = 0$ 、同様に $A_{22} = A_{33} = 0$ となる。従って \mathbf{A} は

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

となる。ここで ω_i は

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2), \quad \omega_2 = \frac{1}{2}(\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3), \quad \omega_3 = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1), \quad (\text{A.10})$$

で定義される回転ベクトルである。ここで $\partial_2 u_3 = \partial u_3 / \partial x_2 = \partial u_z / \partial y$ などである。

また反対称テンソル A_{ij} の定義は $A_{ij} = -\epsilon_{ijk}\omega_k$ と表すことができる。ここで ω_i は回転ベクトル、 ϵ_{ijk} はエディントンのイプシロン記号である。

$$\mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{r} = A_{ij}\delta r_j = -\epsilon_{ijk}\omega_k\delta r_j = -\epsilon_{ijk}\delta r_j\omega_k = -(\delta\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})_i \quad (\text{A.11})$$

ここで回転ベクトルはベクトル表記で $\boldsymbol{\omega} = (\nabla \times \mathbf{u})/2$ と表すことができる。また $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \epsilon_{ijk}a_j b_k$ である。これは $\delta\mathbf{r}$ を軸回りに角度 $|\boldsymbol{\omega}|$ だけ回転させることを意味する。剛体回転は弾性的な変形(変形の伸縮)には影響を与えないので A_{ij} は応力またはひずみには影響がない。

A.5.2 変形に伴う隣り合う2点間の距離の変化

隣り合う2点間の距離がどのように変化するかを調べる。変形後の2点間を結ぶベクトル $d\mathbf{r}'$ は変位ベクトル \mathbf{u} をもちいて

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) \approx d\mathbf{r} + (\delta\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (\text{A.12})$$

と表すことができるので、変形前と後の2点間を結ぶベクトルは

$$d\mathbf{r}' - d\mathbf{r} = \mathbf{E}\delta\mathbf{r} \quad (\text{A.13})$$

となる。変形前の線要素は

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{A.14})$$

であるので、変形後の線要素は

$$\begin{aligned} (ds')^2 &= d\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}' = [d\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r})]^2 \\ &= (dr_i + E_{ij}\delta r_j)(dr_i + E_{ik}\delta r_k) \\ &= (ds)^2 + E_{ij}dr_i dr_j + E_{ik}dr_i dr_k + E_{ij}E_{ik}dr_j dr_k \\ &= (ds)^2 + \left(E_{ij} \frac{\partial r_i}{\partial r_k} + E_{ik} \frac{\partial r_i}{\partial r_j} + E_{ij}E_{ik} \right) dr_j dr_k \\ &= (ds)^2 + (E_{kj} + E_{jk} + E_{ij}E_{ik}) dr_j dr_k \\ &= (ds)^2 [E_{ij} + E_{ji} + E_{ki}E_{kj}] dr_i dr_j \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

ここで $\partial r_i / \partial r_k = \delta_{ik}$ などを用いた。ひずみテンソル ϵ_{ij} は

$$(ds')^2 - (ds)^2 = 2\epsilon_{ij}dr_i dr_j, \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(E_{ij} + E_{ji} + E_{ki}E_{kj}) \quad (\text{A.16})$$

で定義される。結局、変形後の線要素は

$$ds' = \sqrt{(ds)^2 + 2\epsilon_{ij}dr_i dr_j} = (ds) \sqrt{(\delta_{ij} + 2\epsilon_{ij}) \frac{dr_i}{ds} \frac{dr_j}{ds}} \quad (\text{A.17})$$

したがって任意の2点間距離がどのように変化したのかは ϵ_{ij} を知ることができればすべてわかる。 ϵ_{ij} は物体の伸縮についてのすべての情報をもつ*2。変形が十分微小の時 $E_{ij} = \partial u_i / \partial r_j \ll 1$, $E_{ij} + E_{ji} \gg E_{ij}E_{ji}$ である。よって $\epsilon_{ij}^L \approx (E_{ij} + E_{ji})/2 = S_{ij}$ となるので、ここには A_{ij} は現れないことがわかる。これは変形を十分微小 (small displacement) と仮定した結果である。

A.5.3 薄い板の変形

では次に図 A.2 のような、薄い板の曲げ変形を考えてみよう。変形前の位置ベクトル： $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ 、変形後の位置ベクトル： $\mathbf{r} = (x, y, w(x, y))$ と表す。ここで $w(x, y)$ は高さを表す滑らかな一価関数とする。板の曲げにおいては局所的な有限角度の剛体回転を含んでいる。

*2 応力と結びつくのは ϵ_{ij} だけ。

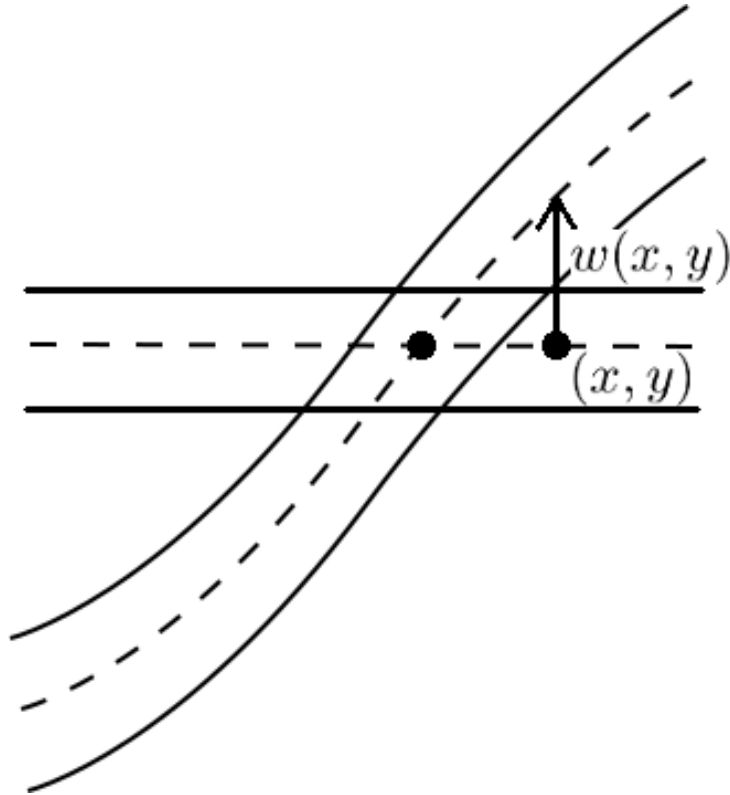


図 A.2. 有限角度の剛体回転を含む板の曲げ変形。

xz 平面で考える

- (i) 板の中世面が変形は $\theta = dw/dx$ の回転
- (ii) 板の内部の任意の点の変形 [$\theta = (\text{一定})$] を考える。

変形前の位置ベクトル： $\mathbf{r}(x, z)$ 、変形後の位置ベクトル： $\mathbf{r}(x', z')$ とする。ここで $x' = x \cos \theta - z \sin \theta$ などである。変位は $u_x = x' - x = -x(1 - \cos \theta) - z \sin \theta$ となる。 $\theta \ll 1$ とすると $u_x = -\theta z$ となる。ひずみの xx 成分は

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (\text{A.18})$$

ここで、

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) z, \quad \theta = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{A.19})$$

より、

$$\epsilon_{xx} \approx -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{A.20})$$

となる。 y 方向にも同様の議論で

$$\epsilon_{yy} \approx -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{A.21})$$

となる。ここでの議論はのちに、薄い構造物の力学を考える時の、構成関係式の導出で利用する。

A.5.4 曲面の微小変形

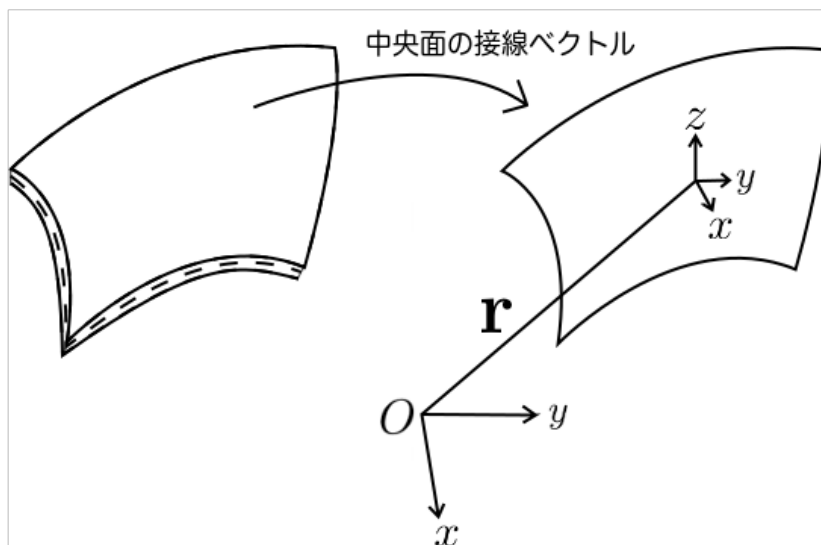


図 A.3. シェルの中央面の接線ベクトル。

緩やかに曲がった面を考える (図 A.3)。曲面の中央面上の任意の点を $\mathbf{r} = (x, y, f(x, y))$ で表現できるとする (モンジュ表示)。ここで $f(x, y)$ は曲面の高さ関数である。曲面の単位接線ベクトルを考えると：

$$\begin{cases} \mathbf{t}_x = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = (1, 0, f_x) \\ \mathbf{t}_y = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (0, 1, f_y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{t}}_x = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2}} (1, 0, f_x) \\ \hat{\mathbf{t}}_y = \frac{1}{\sqrt{1+f_y^2}} (0, 1, f_y) \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

と表すことができる。ここで、 $f_x = \partial f / \partial x$ などである。また単位法線ベクトルは2つの単位接線ベクトル両方に直行している。つまり $\hat{\mathbf{n}} \propto \hat{\mathbf{t}}_x \times \hat{\mathbf{t}}_y$ と表すことができる。 $\hat{\mathbf{t}}_x \times \hat{\mathbf{t}}_y = (-f_x, -f_y, 1)$ なので単位法線ベクトルは

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

となる。

変形をして $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ とする。変位ベクトルを

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{u}(\mathbf{r}) = u\hat{\mathbf{t}}_x + v\hat{\mathbf{t}}_y + w\hat{\mathbf{n}} \quad (\text{A.24})$$

と表す。ここで (u, v, w) は $\hat{\mathbf{t}}_x, \hat{\mathbf{t}}_y, \hat{\mathbf{n}}$ 方向への変位の成分である。また (u, v) は純粋な曲面内の変位である*3。ここで曲面の高さ関数や高さ方向の変位は十分に小さい量 ϵ であるとする。

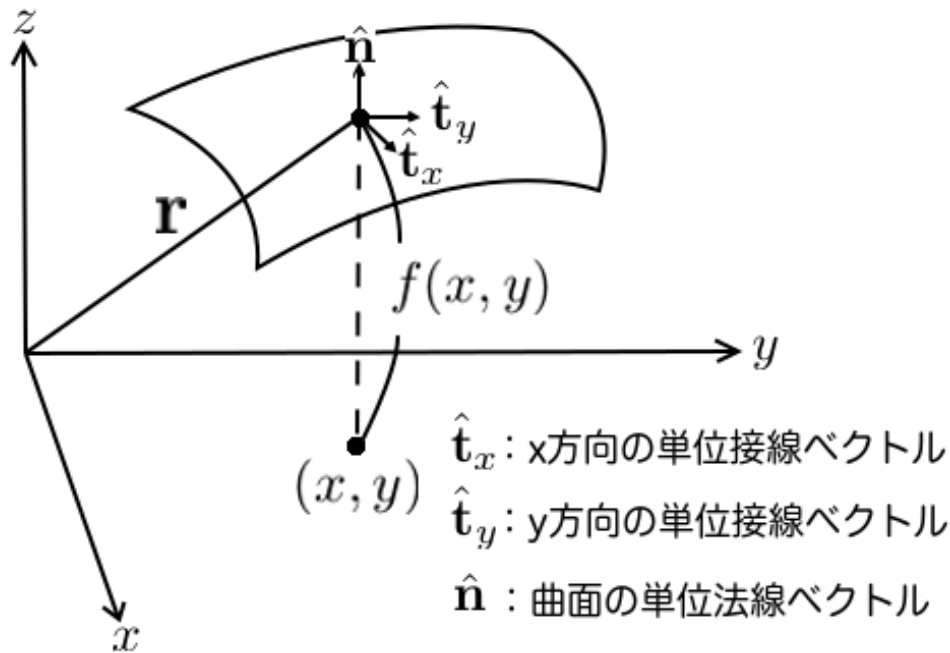


図 A.4. シェルの中央面の単位接線ベクトルと単位法線ベクトル。

微小量のオーダーをカウントすると：

$$f, f_x, f_y \propto \mathcal{O}(\epsilon), \quad u, v \propto \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad w \propto \mathcal{O}(\epsilon) \quad (\text{A.25})$$

となる。以降、全て $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ まで残す。変位ベクトルは

$$\mathbf{u} \approx u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - wf_x \\ v - wf_y \\ w \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

となる。これは変位ベクトルの ϵ の2次まで残した変位ベクトルの表式である。ここで $U = u - wf_x, V = v - wf_y$ とすると $\mathbf{u} = (U, V, w)$ となる。ここで $U, V \propto \mathcal{O}(\epsilon^2), w \propto \mathcal{O}(\epsilon)$ である。変形後の曲面の形は

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x + U(x, y) \\ y + V(x, y) \\ f + w \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

と表すことができる。先ほどと同様に線要素の長さがどのように変化するかを調べていこ

*3 ここでいう純粋な曲面内の変位とはひずみに関与してくる変位の成分という意味である。上述した通り、剛体並進、回転の成分はひずみに影響を及ぼさない。

う。まず変形前の2点間の相対位置ベクトルは

$$d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ df \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ f_x dx + f_y dy \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

となり、変形後は

$$d\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} dx + U_x dx + U_y dy \\ dy + V_x dx + V_y dy \\ f_x dx + f_y dy + w_x dx + w_y dy \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

となる。変形前の線要素の長さは

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (1 + f_x^2)(dx)^2 + (1 + f_y^2)(dy)^2 + f_x f_y dx dy \quad (\text{A.30})$$

であり、変形後の線要素の長さは

$$\begin{aligned} (ds')^2 &= d\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}' \\ &= (1 + 2U_x + U_x^2 + V_x^2 + w_x^2 + 2f_x w_x)(dx)^2 \\ &\quad + (1 + 2V_y + V_y^2 + U_y^2 + w_y^2 + 2f_y w_y)(dy)^2 \\ &\quad + (V_x + U_y + U_x U_y + V_x V_y + f_x f_y + w_x w_y + f_x w_y + f_y w_x) dx dy \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

となるので

$$\begin{aligned} (ds')^2 - (ds)^2 &\approx (2U_x + 2f_x w_x + w_x^2)(dx)^2 \\ &\quad + (2V_y + 2f_y w_y + w_y^2)(dy)^2 \\ &\quad + 2(V_x + U_y + f_x w_y + f_y w_x + w_x w_y) dx dy \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

ここで U_x^2 などの高次微小項は無視した。ひずみテンソル $\epsilon_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = x, y$) は

$$(ds')^2 - (ds)^2 = 2\epsilon_{\alpha\beta} dx dy = 2(dx, dy) \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

である。ここで $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$ である。上の2式を比較すると

$$\epsilon_{xx} = U_x + f_x w_x + \frac{1}{2} w_x^2, \quad (\text{A.34})$$

$$\epsilon_{yy} = V_y + f_y w_y + \frac{1}{2} w_y^2, \quad (\text{A.35})$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} (V_x + U_y + f_x w_y + f_y w_x + w_x w_y) \quad (\text{A.36})$$

となる。ここで $U = u - f_x w$, $V = v - f_y w$ を代入すると

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (u - f_x w) + \frac{1}{2} w_x^2 = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (\text{A.37})$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (v - f_y w) + \frac{1}{2} w_y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (\text{A.38})$$

$$2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) w + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (\text{A.39})$$

となる。まとめてかくと

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta) - (\partial_\alpha \partial_\beta f) w + \frac{1}{2} (\partial_\alpha w) (\partial_\beta w) \quad (\text{A.40})$$

と表記できる。 x, y 座標を $f(x, y) = x^2/2R_1 + y^2/2R_2$ と選ぶ*4。ここで R_1, R_2 は主曲率半径を表している。代入すると

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (\text{A.41})$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (\text{A.42})$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (\text{A.43})$$

となる。ここでそれぞれの右辺第三項は非線形項、それ以外は線形項である。

A.5.5 歪みに関する「両立性」の条件

3次元の弾性論では変位場は $\mathbf{u} = (u, v, w)$ であり、独立な成分は3つである。一方でひずみ場は $\epsilon_{ij} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2$ であり、対称テンソルなので独立な成分は6つである。任意のひずみテンソルを与えて、それを実現するような変位場 u を決めるということは不可能である (u が一意には決定できない)。変位場 u を決定するためには ϵ_{ij} の成分は $6 - 3 = 3$ 個の独立な関係式を満たす必要がある (Compatibility relations, 数学的、幾何学的な恒等式)。

2次元弾性論

微小変位の近似を採用し、ひずみを線形化する。2次元では変位場 $\mathbf{u} = (u, v)$ なので独立な成分は2つ。ひずみ場は $\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix}$ であり、対称テンソルなので独立な成分は3つ。よって $3 - 2 = 1$ 個の両立性の関係式がある。線形化されたひずみ、 $\epsilon_{xx} = \partial u / \partial x, \epsilon_{yy} = \partial v / \partial y, 2\epsilon_{xy} = (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)$ から u, v を消去する：

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad (\text{A.44})$$

これが両立性の関係式 (Compatibility relations) である。

次に曲面について考えてみる。線形化された曲面のひずみテンソルの成分はそれぞれ、 $\epsilon_{xx} = \partial u / \partial x - f_{xx} w, \epsilon_{yy} = \partial v / \partial y - f_{yy} w, 2\epsilon_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x - 2f_{xy} w$ となる。ここで $f(x, y)$ の最低次は2次形式で近似できるので、 $\partial_\alpha \partial_\beta f (= f_{\alpha\beta})$ は定数とみなす。先程と同

*4 曲率を表現する最低次は2次関数。

様に u, v を消去すると

$$\partial_y^2 \epsilon_{xx} + \partial_x \epsilon_{yy} - 2\partial_x \partial_y \epsilon_{xy} = -\partial_y^2 (f_{xx}w) - \partial_x^2 (f_{yy}w) - 2\partial_x \partial_y (f_{xy}w) = -[f, g], \quad (\text{A.45})$$

となる。ここで

$$[f, g] \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \quad (\text{A.46})$$

とおいた。とくに $f(x, y) = x^2/2R_1 + y^2/2R_2$ のとき $f_{xx} = 1/R_1, f_{yy} = 1/R_2$ なので

$$(\partial_y^2 \epsilon_{xx} + \partial_x^2 \epsilon_{yy} - 2\partial_x \partial_y \epsilon_{xy}) + \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w = 0, \quad (\text{A.47})$$

である。これは幾何学的な関係式でガウスの定理の最低次まで残して表現したものである。

A.6 応力とは

これまでの章では弾性体の歪みに関する議論をしてきた。ひずみは変形前と後の物体の形状だけを見て決定することができる。では次に、ひずみを応力と結びつけていく。物体にどのような力が働くと、どのような変形が起こるかを調べていく。

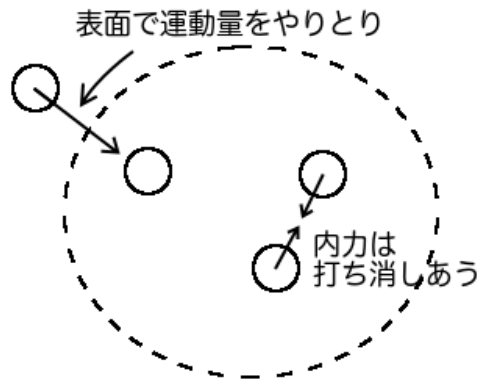


図 A.5. 面積力は物体内部において物体の各部分が互いに及ぼしあう力 (内力) であり、物体の表面積に比例している： $\mathbf{F}_a \sim \ell^2$ 。

物質内部を構成する分子同士に作用する力は作用・反作用の法則によりちょうど打ち消し合う。正味ではこの領域に作用する力は境界を通じて内部に及ぼされる力の総和になっている。応力 (弾性内力) は面積力を正しく定義する概念である。弾性体の内部と外部を定義するためには、表面の向きである法線ベクトルを考える (図 A.6)。

1. $\hat{\mathbf{n}}$ の向かう先の領域 (外部領域) +
2. $\hat{\mathbf{n}}$ と反対向きの領域 (内部領域) -

$\hat{\mathbf{n}}$ の方向 (- から + に向かう向き) を正と定義する。+ の領域の媒質が - の領域の媒質に微小面積 dA を通じて及ぼす力の総和を $d\mathbf{F}$ とする。 $d\mathbf{F}$ は dA に比例し、 $d\mathbf{F} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}})dA$

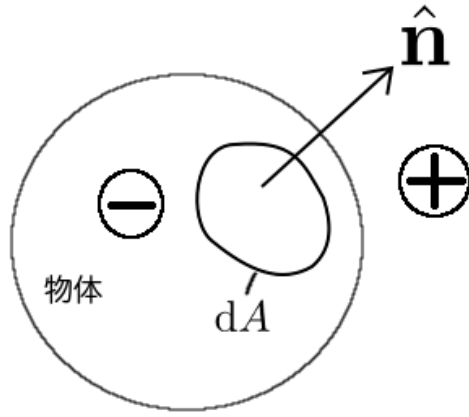


図 A.6. 物体を2つの領域に隔てる。物体の表面の任意の微小面積 dA の法線ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ を考える。このとき $\hat{\mathbf{n}}$ の向かう先の領域が外部領域、 $\hat{\mathbf{n}}$ と反対の向きを内部領域とする。

と表現できる。 $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}})$ は単位面積あたりの力 $[\text{N}/\text{m}^2] = [\text{Pa}]$ である。以降 $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}})$ と書く (\mathbf{r} を省略)。 $-$ の領域の媒質が $+$ の領域の媒質に dA を通じて及ぼす力の総和は $-d\mathbf{F}$ (作用・反作用の法則) である。よって $(-d\mathbf{F}) = \mathbf{f}(-\hat{\mathbf{n}})dA = -\mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}})dA \Rightarrow \mathbf{f}(-\hat{\mathbf{n}}) = -\mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}})$ である。これより \mathbf{f} は $\hat{\mathbf{n}}$ の奇関数であることが分かる。

A.6.1 運動

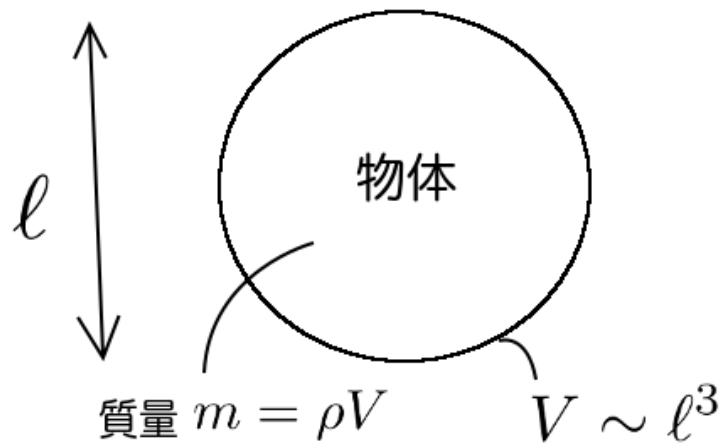


図 A.7. 体積 $V \sim \ell^3$ の物体の運動。応力そのものでは物体の運動は引き起こされない。

ニュートンの運動方程式から物体の変形や運動のオーダーを考える (図 A.7)。典型的な大きさ L の物体中の微小体積要素 $V \sim \ell^3$ の運動を考えよう。ニュートンの運動方程式は $m\mathbf{a} = \mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b$ となる。ここで微小量 $\epsilon \sim \frac{\ell}{L}$ とした時、微小量のオーダーをカウントすると面積力 $\mathbf{F}_a \sim \mathcal{O}(\epsilon^2)$ 、質量 $m \sim \mathcal{O}(\epsilon^3)$ 、体積力 $\mathbf{F}_b \sim \mathcal{O}(\epsilon^3)$ 、加速度 $\mathbf{a} \sim \mathcal{O}(\epsilon^0)$

より

$$\mathcal{O}(\epsilon^2) : \mathbf{0} = \mathbf{F}_a, (\epsilon \rightarrow 0) \quad (\text{A.48})$$

$$\mathcal{O}(\epsilon^3) : m\mathbf{a} = \mathbf{F}_b, (\epsilon \rightarrow 0) \quad (\text{A.49})$$

となる。 $(\epsilon \rightarrow 0)$ で面積力の和はそれのみでいつでもゼロになる。つまり応力そのもので物体の運動は誘起されない。

A.6.2 4 面体に働く応力

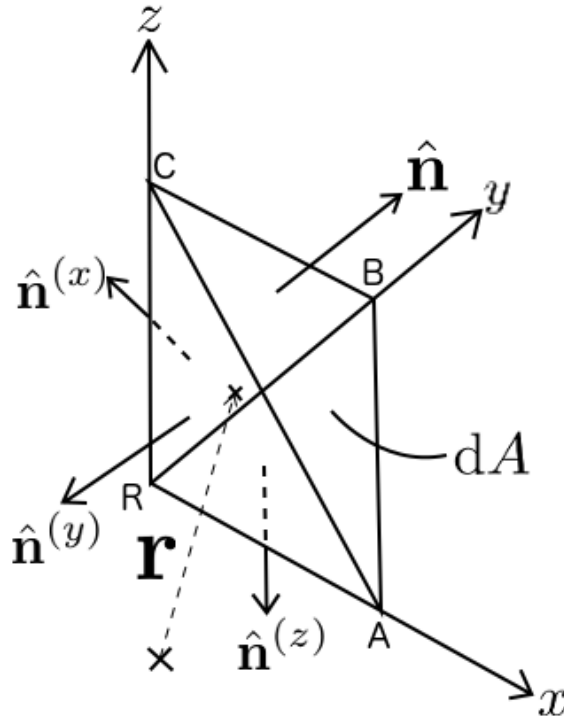


図 A.8. 四面体に働く応力。r は原点から四面体の重心に向かう位置ベクトルである。

次に物体内部の微小な四面体を考える (図 A.8)。四面体は無限に小さく、各面に作用する力は面内で一定とみなせる。また各四面体の位置ベクトルはすべて \mathbf{r} で指定できる。四面体に働く内力の総和 $d\mathbf{F}_{\text{tot}}$ を考えよう。 $d\mathbf{F}_{\text{tot}}$ は各面に働く応力と各三角形の面積の積の和で表される：

$$d\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}})dA + \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}}^{(x)})dA_x + \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}}^{(y)})dA_y + \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}}^{(z)})dA_z \quad (\text{A.50})$$

ここで

$$\begin{aligned} dA_x : \Delta BCR \text{ の面積} &= dA(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x), \\ dA_y : \Delta ACR \text{ の面積} &= dA(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y), \\ dA_z : \Delta ABR \text{ の面積} &= dA(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z), \end{aligned}$$

また $\hat{\mathbf{n}}^{(x)} = -\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{n}}^{(y)} = -\hat{\mathbf{e}}_y$, $\hat{\mathbf{n}}^{(z)} = -\hat{\mathbf{e}}_z$, である。ここで微小量 $\epsilon = \frac{\ell}{L} \rightarrow 0$ のとき

$$d\mathbf{F}_{\text{tot}} = [\mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}}) + \mathbf{f}(-\hat{\mathbf{e}}_x)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) + \mathbf{f}(-\hat{\mathbf{e}}_y)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y) + \mathbf{f}(-\hat{\mathbf{e}}_z)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z)] dA, \quad (\text{A.51})$$

となる。微小面積は $dA \sim \mathcal{O}(\epsilon^2)$ より、 $\frac{d\mathbf{F}_{\text{tot}}}{\epsilon^2} \rightarrow 0$ なので、 $[\dots] = 0$ となる。よって

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}}) + \sum_{j=x,y,z} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{e}}_j)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j), \quad (\text{A.52})$$

となる。 $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{e}}_j)$ を $\hat{\mathbf{e}}_j$ で分解すると

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{e}}_j) = \sum_i [\mathbf{f}(\hat{\mathbf{e}}_j)\hat{\mathbf{e}}_i] \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (\text{A.53})$$

ここで $\sigma_{ij} \equiv \mathbf{f}(\hat{\mathbf{e}}_j)\hat{\mathbf{e}}_i$ とおくと

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{e}}_j) = \sum_i \sigma_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \quad (\text{A.54})$$

となる。また $\hat{\mathbf{n}}$ 方向の力は

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j) = \sum_i \sum_j [\sigma_{ij} n_j] \hat{\mathbf{e}}_i \quad (\text{A.55})$$

となる。ここで $n_j = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$ である。 dA を通じての + から - の力は

$$d\mathbf{F} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}})dA = \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{r}) n_j \hat{\mathbf{e}}_i dA \quad (\text{A.56})$$

である。

$$\mathbf{F} = \sum_i F_i \hat{\mathbf{e}}_i \quad (\text{A.57})$$

とおくと

$$d\mathbf{F} = \sum_i (dF_i) \hat{\mathbf{e}}_i \quad (\text{A.58})$$

より

$$dF_i = \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{r}) n_j dA, \quad (\text{A.59})$$

と表すことができる。以上より例えば応力の x 成分は

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{e}}_x) &= \sum_i \sigma_{ix} \hat{\mathbf{e}}_i = \sigma_{xx} \hat{\mathbf{e}}_x + \sigma_{yx} \hat{\mathbf{e}}_y + \sigma_{zx} \hat{\mathbf{e}}_z \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

となる。これは x 軸の正方向から負方向へ作用する単位面積あたりの力である。 y, z 軸に関しても同様である。

$d\mathbf{F} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}})dA$ は $\hat{\mathbf{n}}dA$ に線形に比例する。ある物体内部の点 \mathbf{r} において、 $\hat{\mathbf{n}}dA$ は任意の取り方がある。その方向に応じて $d\mathbf{F}$ が 1 つに定まる (測定できる)。成分の関係 $dF_i = \sum_j (\sigma_{ij}n_j)dA$ は σ_{ij} がベクトル $\hat{\mathbf{n}}dA$ をベクトル $d\mathbf{F}$ に変換するものであることを意味する。したがって、 $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ を成分として持つ $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$ は座標変換に際してテンソルとしてふるまう。 $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ は応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$ の成分であり、 $\hat{\mathbf{n}}$ に依存せず \mathbf{r} のみの関数である。応力が定義できたので次はその性質を調べていこう。

A.6.3 応力テンソルの対称性

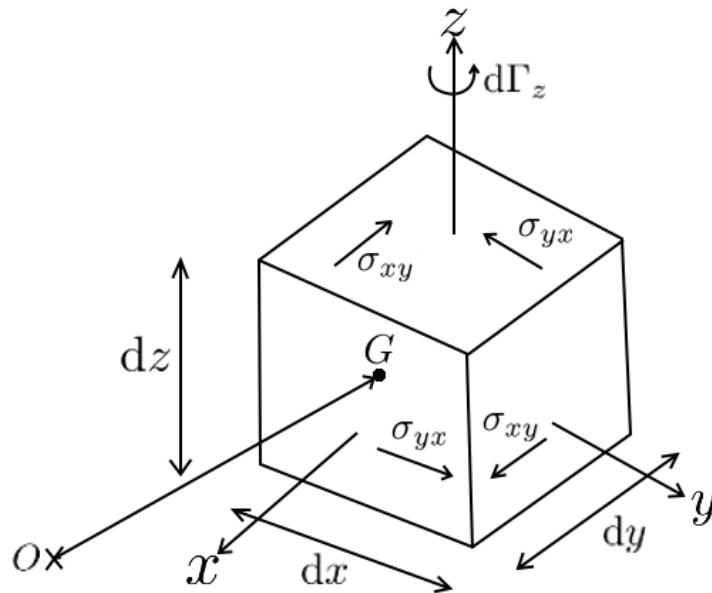


図 A.9. 微小要素に働く応力とモーメント。応力が対称テンソルでないと物体の各点の角速度が無限大になる。

応力テンソルは対称テンソルである。そのことは物体中の任意の要素に作用する応力によるモーメントを考えることで示すことができる。物体の典型的なサイズを d とする。ただし d は十分に微小である。体積 V 内での応力の変化は無視できる。ここで \mathbf{r} は V の重心 G の位置ベクトルをあらわす。 z 軸に垂直な面に作用する力によるトルク $d\Gamma_z$ は上下で同じ応力の値をもつので打ち消しあう。したがって、

$$\begin{aligned}
 d\Gamma_z &= (\sigma_{yx}dx dz) \left(\frac{dy}{2} \right) + (-\sigma_{yx}dx dz) \left(-\frac{dy}{2} \right) \\
 &\quad - \left[(\sigma_{xy}dy dz) \left(\frac{dx}{2} \right) + (-\sigma_{xy}dy dz) \left(-\frac{dx}{2} \right) \right] \\
 &= (\sigma_{yx} - \sigma_{xy})dx dy dz,
 \end{aligned} \tag{A.61}$$

となる。よって $d\Gamma_z \rightarrow \mathcal{O}(d^3)$ となる。また V の回転に関する運動方程式は $(dI)\dot{\omega}_z = d\Gamma_z + d\Gamma_{\text{ext}}$ である。ここで dI は体積 V の慣性モーメント、 $d\Gamma_{\text{ext}}$ は V に作用する外力に

よるトルクの z 成分である。これらの微小量のオーダーをカウントする。

慣性モーメントは $I_{ij} = \int_V \rho r_i r_j dV \sim \mathcal{O}(d^5)$ と評価できる。またトルク $d\Gamma_{\text{ext}} \sim \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{f}_{\text{ext}}) \cdot \hat{\mathbf{z}} dV \sim \mathcal{O}(d^4)$ となる。よって

$$(dI)\dot{\omega}_z = d\Gamma_z + d\Gamma_{\text{ext}}, \quad (\text{A.62})$$

ここで dI は $\mathcal{O}(d^5)$ 、 $d\Gamma_z$ は $\mathcal{O}(d^3)$ 、 $d\Gamma_{\text{ext}}$ は $\mathcal{O}(d^4)$ となるので $d \rightarrow 0$ の極限で最低次の $\mathcal{O}(d^3)$

$$\frac{d\Gamma_z}{d^3} \rightarrow 0, \quad (d \rightarrow 0), \quad (\text{A.63})$$

より $d\Gamma_z \rightarrow 0$ となる。

$$d\Gamma_z = (\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) dx dy dz \quad (\text{A.64})$$

であるから

$$\sigma_{xy}(\mathbf{r}) = \sigma_{yx}(\mathbf{r}), \quad (\text{A.65})$$

でなければならない。 z 軸を x, y 軸に取り換えて同じ議論をすると、 $\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \sigma_{ji}(\mathbf{r})$ となる。応力テンソルは対称テンソルである。なぜなら、もし非対称項があると、物体の各点の

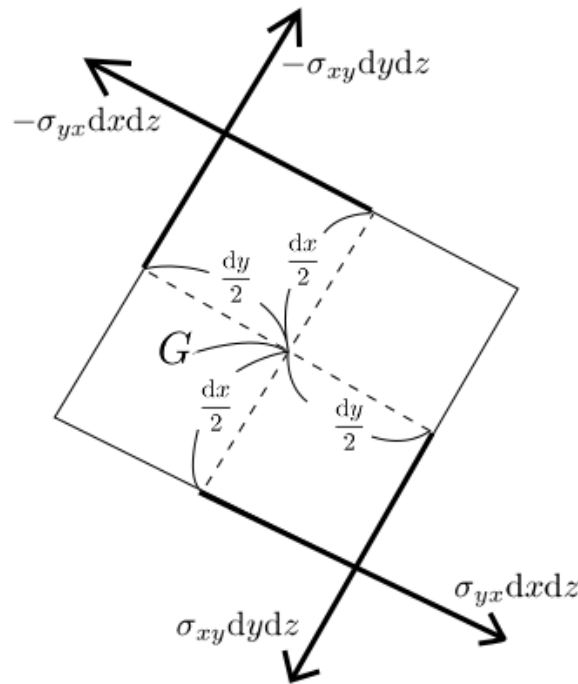


図 A.10. 微小要素に働く応力を z 軸方向から見た図。

角速度が無限大になることが許されるからである。また応力テンソルの正負は図 A.10 に示すように次のとおりである：

1. 応力テンソルが正のとき物体の各面は互いに両側から引っ張られている。
2. 応力テンソルが負のとき物体の各面は互いに両側から圧縮されている。

応力の正負を見るために、例えば静水圧を考えてみると、静水圧 $p(\mathbf{r})$ はこれ自身が正になるように定義されている。応力の成分は次の2つに分類できる (図 A.11) :

1. 対角成分：各面に垂直に作用する力の成分
2. 非対角成分：各面に平行に作用する力の成分

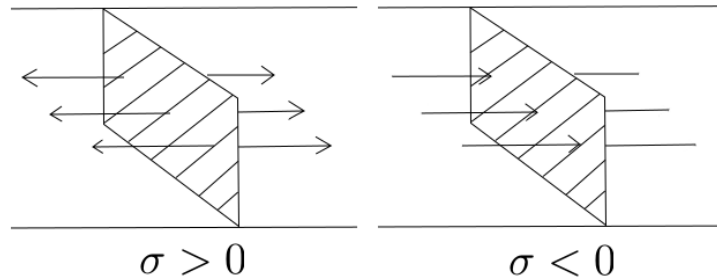


図 A.11. 応力の正負。応力が正の場合はその面は引っ張られており、負の場合は圧縮を受けている。

σ_{ij} は対称テンソルなので応力テンソルは各点で対角化可能

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.66})$$

ここで σ_1, σ_2 は主応力成分 (principal stress)、1 方向、2 方向を主応力成分 (principal stress direction) と呼ぶ (図 A.12)。この主軸方向は歪のそれらとは一般には一致しない。

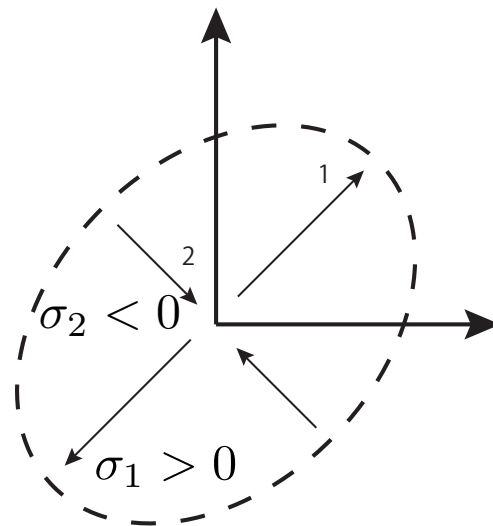


図 A.12. 主応力成分。これはひずみのそれらとは一般には一致しない。

A.6.4 力の釣り合いの式

ここでの議論は微小変位の近似のもとですすめる*5。この近似により変形前後の座標系の変化を無視できる。任意の体積 V に対して

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \cdots V \text{ に作用する内力の総和,}$$

$$\mathbf{G} = \int_V \rho \mathbf{f}_{\text{ext}} dV \cdots V \text{ に作用する外力の総和,}$$

とする (図 A.13)。平衡状態では

$$\mathbf{0} = \mathbf{F} + \mathbf{G} = \oint_{\partial V} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}_{\text{ext}}) dA \quad (\text{A.67})$$

3 番目の等式ではガウスの定理を用いた。ここで V は任意に取れるので

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_{\text{ext},i} = 0, \quad (\text{A.68})$$

となる。これは連続媒質の平衡に関する Cauchy-Poisson の条件と呼ばれている。

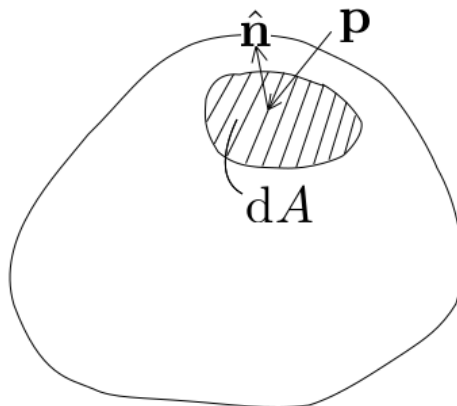


図 A.13. 境界での応力の条件。

物体表面に直接作用する外力 \mathbf{p} は境界条件に入る。物体表面の面要素 dA に内側から作用する力は $\sigma_{ij} \cdot n_j dA$ であるしたがって境界では

$$p_i dA - \sigma_{ij} n_j dA = 0 \quad (\text{A.69})$$

を得る。ここでも dA は任意に取れるので

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{p} \quad (\text{A.70})$$

となる。これは境界での力のつり合い式である。

*5 ランダウの本などもこの話がほとんどである。

A.6.5 構成関係式：フック則

構成関係式とは応力 (stress) とひずみ (strain) の間の関係式である。これはある応力のもとで物体はどのように変形するのかを表す関係式である。我々の扱うモデルは：

1. 変形前の物体に応力はない
2. 弾性媒質は均一
3. 微小ひずみの近似が適用できる

この3つの条件を仮定する。1-3より σ_{ij} は ϵ_{ij} に比例・線形関係にある ($F(x) = -kx$: フック則)。この関係式は任意の座標変換に対して不変でなければならない。ひずみテンソル ϵ_{ij} の1次式で作ることができる不変量は $\text{Tr}[\epsilon_{ij}] = \epsilon_{kk} (= \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})$ のみである。2階の対称な定数テンソルで座標不変なものにクロネッカーのデルタ δ_{ij} がある。座標不変になるような1次の関係式は

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (\text{A.71})$$

となる*6。ここで λ, μ はラメ係数である。(μ は shear に対する弾性体の剛性を表す定数。弾性体の安定性から $\mu > 0$)

A.6.6 一軸引っ張り

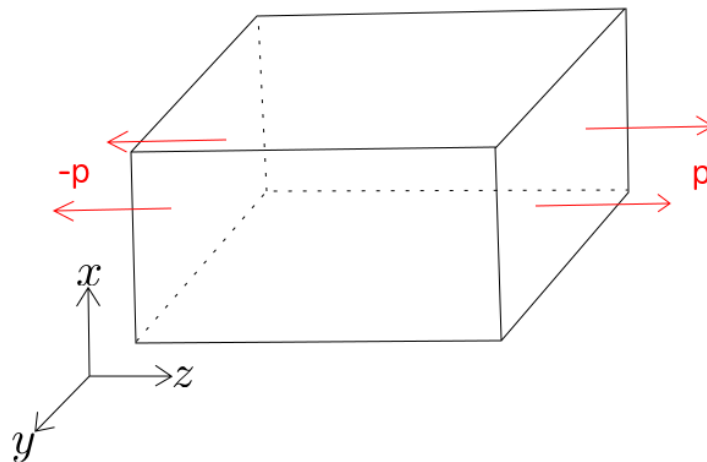


図 A.14. 物体の一軸引っ張り。物体は一様な変形をする。

弾性体を一つの軸方向に引っ張った時の変形を考察することによって、弾性定数としてよく用いられるヤング率 E とポアソン比 ν を定義する (図 A.14)。物体は均等に変形する。いたるところでひずみや応力は一定値を取る。境界条件は z 面で $\sigma_{zz} = p$ である。応力は zz

*6 ユークリッド座標系では ϵ_{ij} と ϵ^{ij} は区別せずに表記している。

成分以外、すべてゼロ。また、均等変形なので内部についても同じである。

$$\sigma_{ik}n_k = p_i, \quad p_x = p_y = 0, \quad (\text{A.72})$$

したがって、

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yx} = \sigma_{yy} = \sigma_{yz} = 0, \quad (\text{A.73})$$

となるので、

$$\sigma_{xx} = \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + 2\mu\epsilon_{xx} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) = 0, \quad (\text{A.74})$$

$$\sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) = 0, \quad (\text{A.75})$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) = p, \quad (\text{A.76})$$

を得る。式 (A.74)-(A.75) より

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} \quad (\text{A.77})$$

また、式 (A.74)+(A.75) より

$$2(\lambda + \mu)(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) + 2\lambda\epsilon_{zz} = 0, \quad (\text{A.78})$$

となる。これより

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\epsilon_{zz} = -\nu\epsilon_{zz} \quad (\text{A.79})$$

が得られる。ここでポアソン比：

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (\text{A.80})$$

と定義した。ポアソン比はある軸方向のひずみに対して、その他の軸がどの程度ひずむか、という比である。また式 (A.78) を (A.76) に代入すると

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\epsilon_{zz} + \lambda \left[-\frac{\lambda}{(\lambda + \mu)} \right] \epsilon_{zz} &= p \Rightarrow \frac{(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu) - \lambda^2}{\lambda + \mu} \epsilon_{zz} = p, \\ \Rightarrow \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \epsilon_{zz} &= p \Rightarrow \epsilon_{zz} = \frac{p}{E} \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

となる。

ここでヤング率を

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (\text{A.82})$$

と定義した。ヤング率は圧力と単位が同じパスカルである。ヤング率は弾性体の剛性定数としてよく用いられる。与えた応力ともとめたひずみをまとめて書いておく：

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} -\nu p/E & 0 & 0 \\ 0 & -\nu p/E & 0 \\ 0 & 0 & p/E \end{pmatrix} \quad (\text{A.83})$$

となる。

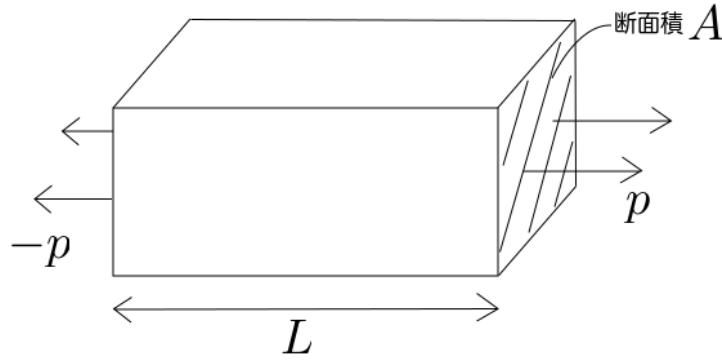


図 A.15. 断面積 A 、長さ L の物体を両端で応力 p で引張る。 A が大きいほどバネ定数は大きくなり、 L が大きいほどバネ定数は小さくなる。

断面に作用している外力： $F = pA$, $p = E\epsilon_{zz}$ とする。 z 方向の長さ $L \rightarrow L + z$ 。ひずみは $\epsilon_{zz} = [(L + z) - L]/L = z/L$ であるので、 $z/L = F/(EA)$ より、 $F = EAz/L = Kz$ を得る。ここでバネ定数 $K = EA/L$ である。同じ材質 (ヤング率 E) ならば、バネ定数は弾性体の形状に依存する (L, A, \dots) (図 A.15)。これは細長い棒 $A/L \ll 1$ だと柔らかく、太い棒 $A/L \gg 1$ だと硬くなることを示しており、直観とも一致している。

A.6.7 一様圧縮

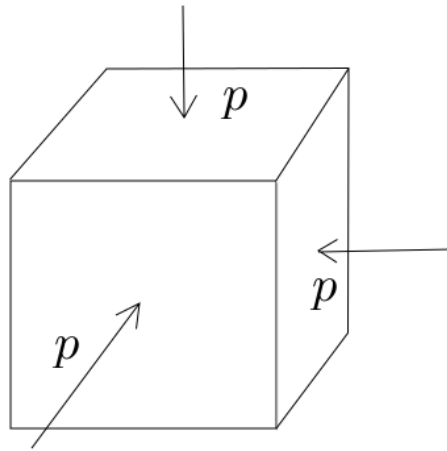


図 A.16. 物体に一様に圧力が加わった時の変形。境界の各面が応力 p で圧縮されている。

弾性体に一様な静水圧が作用する (均等変形を内部においても仮定) (図 A.16)。つまり $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ である。成分ごとに書き下すと

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) = -p, \\ \sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) = -p, \\ \sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) = -p, \end{cases} \quad (\text{A.84})$$

となる。3つすべてを足し合わせると

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu + \lambda)(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) &= -3p, \\ \Rightarrow \text{Tr}[\epsilon] = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} &= -\frac{3}{3\lambda + 2\mu}p \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

ここでひずみのトレースは体積変化率 (微小変位するとき) を表している。

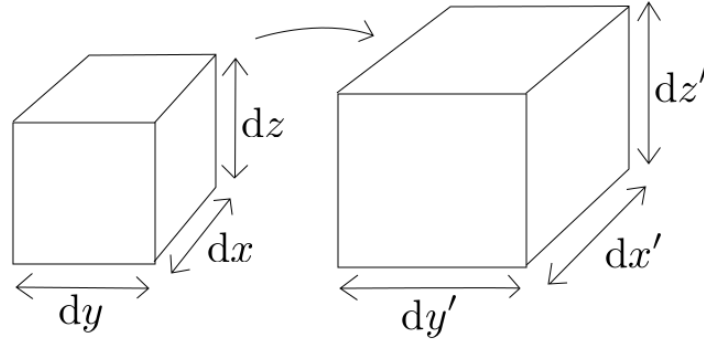


図 A.17. 物体に一樣に応力がかかった時の変形。変形は一樣に起こることを仮定している。

微小体積要素は $dV = dx dy dz \rightarrow dV' = dx' dy' dz'$ と変化する (図 A.17)。ひずみの定義より $\epsilon_{xx} = (dx' - dx)/dx \rightarrow dx' = (1 + \epsilon_{xx})dx$ となる。以上より

$$dV' = dx' dy' dz' (1 + \epsilon_{xx})(1 + \epsilon_{yy})(1 + \epsilon_{zz}) = dV(1 + \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} + \mathcal{O}(\epsilon^2)), \quad (\text{A.86})$$

となる。体積変化率: $(dV' - dV)/dV = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y + \partial u_z / \partial z = \nabla \cdot \mathbf{u}$ なので

$$\frac{1}{K} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} \text{ or } K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (\text{A.87})$$

とおくと

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = -\frac{1}{K}p \quad (\text{A.88})$$

一樣圧縮に対して物体は膨張しないので、力学的な安定性から $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$ となる。ポアソン比は

$$\nu = \frac{K - \frac{2}{3}\mu}{2(K + \frac{1}{3}\mu)} = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} = \frac{3\frac{K}{\mu} - 2}{2\left[\left(3\frac{K}{\mu}\right) + 1\right]} \quad (\text{A.89})$$

となる。 $\frac{K}{\mu} \rightarrow \infty$ (非圧縮) で $\nu = \frac{1}{2}$ 、 $\frac{K}{\mu} \rightarrow 0$ の極限で $\nu \rightarrow -1$ となる。以上より一般に $-1 < \nu \leq \frac{1}{2}$ となる。ほとんどの物質において普通 $\nu > 0$ である。ポアソン比が負の物質は内部構造、幾何形状を工夫すると、意図的 (人工的) にデザイン・作成することができる (メカニカル・メタマテリアルなど)。またヤング (Young) 率とポアソン比はラメ定数を用いるとそれぞれ:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = \frac{\mu(2\lambda + 2\mu) + \mu\lambda}{\lambda + \mu} = 2\mu + \frac{\lambda}{\mu + \lambda}\mu, \quad (\text{A.90})$$

$$\mu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (\text{A.91})$$

となる。またラメ定数はヤング率とポアソン比を用いると

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A.92})$$

と表すことができる。

以上より構成関係式はラメ定数の代わりにヤング率とポアソン比を用いて表すと

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{A.93})$$

となる。

A.6.8 弾性エネルギー

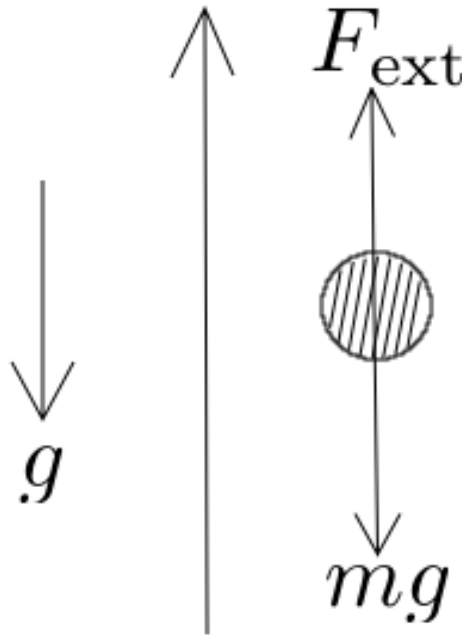


図 A.18. 質点には重力と外力が作用している。

ここでは弾性エネルギーを考える。ニュートン力学の復習になるが、まず質点の仕事とエネルギーを考える (図 A.18)。ニュートンの法則は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad m\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{A.94})$$

であった。質点が $d\mathbf{r}$ 変位する間に外力 \mathbf{F} のする仕事は

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dW \quad (\text{A.95})$$

より

$$d\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\right) = dW \quad (\text{A.96})$$

となる。運動エネルギー $K = mv^2/2$ より

$$dK = dW \quad (\text{A.97})$$

となる。これを仕事・運動エネルギーの定理という。今度はつりあいを保ちながらゆっくりと変化させる。重力場の中の運動だとすると

$$ma = -mg + F_{\text{ext}} \quad (\text{A.98})$$

である。ここで a は加速度である。より、 F_{ext} のする仕事 W_{ext} 、 mg のする仕事 W_g とすると

$$dK = dW_{\text{ext}} + dW_g, \quad (\text{A.99})$$

となる。 $dK = 0$ のとき $dW_{\text{ext}} + dW_g = 0$ となる。重力のポテンシャルエネルギー \mathcal{E}_G の変化分は $d\mathcal{E}_G \equiv -dW_g$ と定義されている。よって

$$dW_{\text{ext}} = d\mathcal{E}_G \quad (\text{A.100})$$

となる。

A.6.9 バネの弾性エネルギー

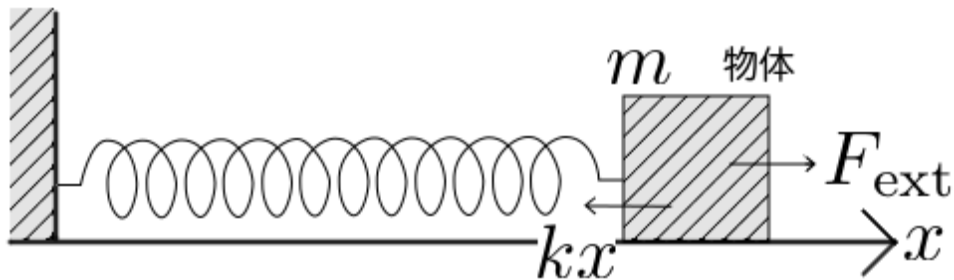


図 A.19. 質点にはバネの復元力と外力が作用している。ここで摩擦は考えていない。

バネが物体に及ぼす力 $F = -kx$ 、手が及ぼす力 F_{ext} なので

$$ma = -kx + F_{\text{ext}} = F + F_{\text{ext}} \quad (\text{A.101})$$

である。はじめ x でつり合い状態にある (図 A.19)。 F_{ext} を加えて $x \rightarrow x + \delta x$ につり合いを保ちつつ移動させる。このときバネのする仕事は

$$\delta W_s = F\delta x = -kx\delta x \quad (\text{A.102})$$

手の加える仕事は

$$\delta W_{\text{ext}} = F_{\text{ext}}\delta x \quad (\text{A.103})$$

となる (図 A.18)。バネの弾性エネルギーの変化分は

$$\delta\mathcal{E}_s = kx\delta x = -\delta W_s \quad (\text{A.104})$$

となる。ここで $F + F_{\text{ext}} = 0$ より $dW_{\text{ext}} = -F\delta x = \delta\mathcal{E}_s$ となる。保存力だけが作用する系において、つり合いを保ちつつ系を変化させるために加えた外力がする仕事は、その系の全位置エネルギーの変化分に等しい。

A.6.10 重力下での弾性体

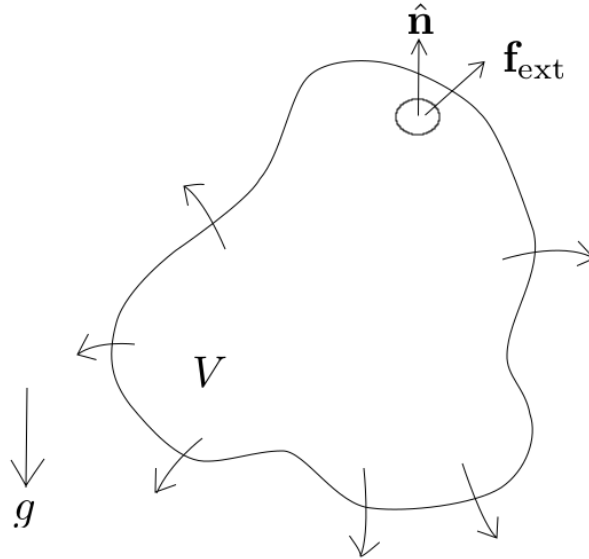


図 A.20. 重力下の弾性体。

ここからは弾性体の話に戻る。

「微小変位の近似」のもとで議論する： $\epsilon_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$ 。このとき弾性体の各点でのつり合いの式： $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j + \rho g_i = 0$ が成り立つ。ここで $(\mathbf{g} = (0, 0, -g))$ は重力である。重力下で、ある変形状態にある弾性体の変位場： $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ だったとする (図 A.20)。この物体の表面に外力 \mathbf{f}_{ext} を加えて、微小変位 $\mathbf{u}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \delta \mathbf{u}(\mathbf{r})$ をつり合いを保ちつつ引き起こす。

系全体のポテンシャルエネルギーの変化分 $\delta\mathcal{E}_{\text{ext}} = \oint_{\partial V} \mathbf{f}_{\text{ext}} \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{r}) dA$ となる。力のつり合い状態では、表面で $\mathbf{f}_{\text{ext}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ なので

$$\delta\mathcal{E}_{\text{tot}} = \oint_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dA = \oint_{\partial V} (\sigma_{ij} \delta u_i) n_j dA = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \delta u_i) dV \quad (\text{A.105})$$

ここで最後の等式は Gauss の定理を用いた*7。さらに

$$\delta\mathcal{E}_{\text{tot}} = \int_V \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i + \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i) \right] dV \quad (\text{A.106})$$

ここで右辺第1項はつり合いの式より $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = -\rho g_i$ である。第2項は

$$\sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i = \frac{\sigma_{ij}}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\delta u_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i) \right] = \sigma_{ij} \delta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right] \quad (\text{A.107})$$

*7 テンソルの場合も同じ扱い。

となる。ここで2個目の等式では応力テンソルの対称性より：

$$\sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta u_i = \sigma_{ji} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta u_j = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta u_j \quad (\text{A.108})$$

などの関係を用いた。よって

$$\delta \mathcal{E}_{\text{tot}} = \int_V (-\rho g_i) \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (\text{A.109})$$

となる。重力によるポテンシャルエネルギーの変化分は

$$\delta \mathcal{E}_G = - \int_V (\rho g_i) \delta u_i dV \quad (\text{A.110})$$

である。また系全体のエネルギーの変化分は重力による変化分と弾性エネルギーの変化分に分けて

$$\delta \mathcal{E}_{\text{tot}} = \delta \mathcal{E}_G + \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \delta \mathcal{E}_G + \delta \mathcal{E}_{\text{el}} \quad (\text{A.111})$$

と書くことができる。よって

$$\delta \mathcal{E}_{\text{el}} = \delta \mathcal{E}_{\text{tot}} - \delta \mathcal{E}_G = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (\text{A.112})$$

となる。ここで $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{a}$ (= 定ベクトル)(剛体並進) のとき $\delta \epsilon_{ij} = 0 \rightarrow \delta \mathcal{E}_{\text{el}} = 0$ となる。しかし $\delta \mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_G \neq 0$ で、重力場以外の保存力が作用していても同様に適用できる。各点での弾性エネルギー密度を $e_{\text{el}}(\mathbf{r})$ とすると、系全体の弾性エネルギーは $\mathcal{E}_{\text{el}} = \int_V e_{\text{el}}(\mathbf{r}) dV$ なので $\delta \mathcal{E}_{\text{el}} = \int_V \delta e_{\text{el}}(\mathbf{r}) dV$ と表すことができる。ここで $\delta e_{\text{el}} = \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \delta \epsilon_{ij}(\mathbf{r})$ である。 σ_{ij} と ϵ_{ij} の間には線形の関係式があるので、 $2e_{\text{el}}(\mathbf{r}) = \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \epsilon_{ij}(\mathbf{r})$ と表される。したがって、 $\delta e_{\text{el}} = (\delta \sigma_{ij} \epsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}) / 2$ となる。また構成関係式 $\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right)$ より、

$$\delta \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\delta \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (\text{A.113})$$

$$\delta \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[\epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta \epsilon_{kk} (\delta_{ij} \epsilon_{ij}) \right] \quad (\text{A.114})$$

ここで右辺2項目に $\delta_{ij} \epsilon_{ij} = \epsilon_{\ell\ell}$ を用いると

$$\delta \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[\epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta \epsilon_{kk} \epsilon_{\ell\ell} \right] = \frac{E}{1+\nu} \left[\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{\ell\ell} \delta_{ij} \right] \delta \epsilon_{ij} = \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \quad (\text{A.115})$$

となる。これより

$$\mathcal{E}_{\text{el}} = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \frac{E}{2(1+\nu)} \int_V \left(\epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \epsilon_{\ell\ell} \right) dV, \quad (\text{A.116})$$

となる。これはフックの弾性体の弾性変形エネルギーを表している。

付録 B

薄い構造物の力学

前章で 3 次元弾性体のつり合いの式を導いた。次は薄い構造物のつり合いの方程式を求めていく。

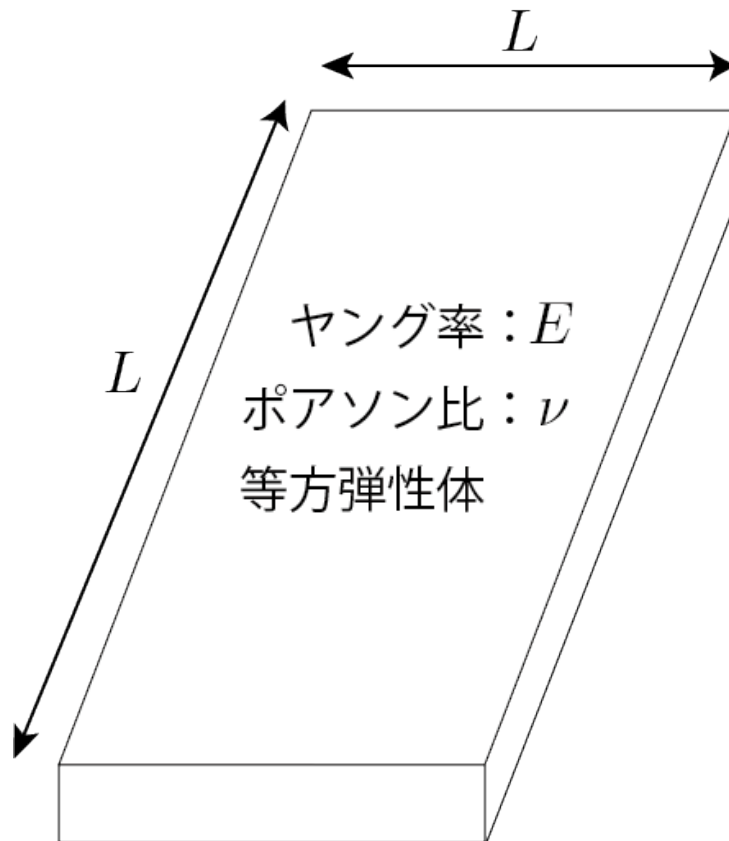


図 B.1. 長さ L 、厚み h 、ヤング率 E 、ポアソン比 ν の薄い弾性板。

次は薄い板の弾性変形について考えていこう。板のサイズ $\sim L[\text{m}]$ 、厚み $\sim h[\text{m}]$ とする*¹。薄いということは、二つの長さスケールが大きく違う、つまり $\epsilon = \frac{h}{L} \ll 1$ ということである。これは微小なパラメータになる。このスケールの違いにより 2 次元的な扱いが可

*¹ 今までは厚みは t と表していたが、この章では h と表すことにする。

能になる。

B.1 板の平面変形:2次元弾性論

面外変形が起きない、つまり曲げ変形を伴わない平面内のひっぱりと圧縮を考える。板は十分薄い ($\epsilon \rightarrow 0$) とする。厚み方向に応力の変化はなく、上下面には外からの表面力は働いていない。つまり境界条件は $\sigma_{iz} = 0$ となる。構成関係式 (フック則) は

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (\text{B.1})$$

あるいは

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{B.2})$$

であった。ここで板内部のあらゆるところで

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0, \quad (\text{B.3})$$

を仮定している。この妥当性については後ほど議論する。構成関係式は

$$\left[\begin{array}{l} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zz} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ \\ \\ = 0 \\ = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \\ = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \\ = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_{xx} + \sigma_{xy}) \\ \\ \end{array} \right] \quad (\text{B.4})$$

もしくは

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}), \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{xy}, \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \quad (\text{B.5})$$

となる。2次元の成分を指定する添字 α, β は x, y または $1, 2$ である。また3次元ユークリッド空間 i, j, k は x, y, z または $1, 2, 3$ である。3次元の弾性エネルギーは

$$\mathcal{E}_{\text{el}} = \int \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \iint \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} dA dz = \int \frac{h}{2} \sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} dA \quad (\text{B.6})$$

である。ここで式 (B.3) と厚み方向に応力やひずみが増えないことを用いた*2。ここで2次元の応力を

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(2D)} = h \sigma_{\alpha\beta} [\text{N/m}] \quad (\text{B.7})$$

*2 これについては後ほど考える

とおく。2次元の応力は単位長さあたりの力である。これを用いると

$$\mathcal{E}_{el} = \int \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta}^{(2D)} \epsilon_{\alpha\beta} dA \quad (\text{B.8})$$

を得る。ここで

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^{(2D)} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}) \\ \sigma_{xy}^{(2D)} = \frac{Eh}{1+\nu} \epsilon_{xy} \\ \sigma_{yy}^{(2D)} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\nu\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

である。

B.2 板の弱い曲げ変形 (キルヒホッフ理論)

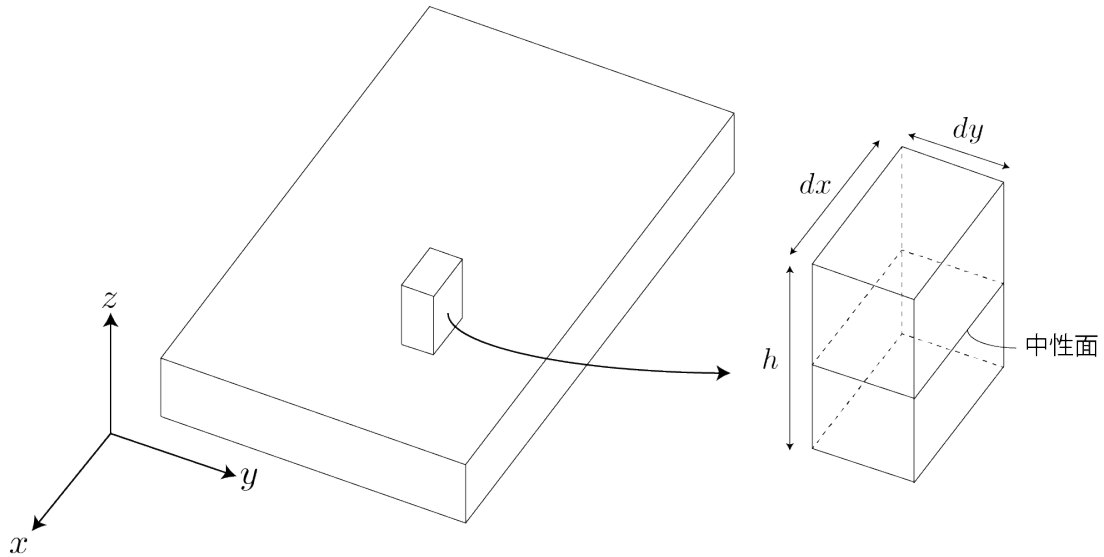


図 B.2. 薄い弾性板の弱い曲げ変形。

力とモーメントのつり合い式を導出していく。板のたわみ (out-of-plane deection, 面外変形) は十分小さいと仮定する (図 B.2)。また中性面 (板の真ん中) は伸縮しない。中性面に作用する断面全体に作用する力とモーメントのつり合いの条件を探す。図 B.3 のような微小体積要素を考える。面 ABCD に作用する力

$$d\mathbf{F}^{(x)}(x+dx, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{e}}_x dy dz = \begin{bmatrix} T_{xx}(x+dx, y) \\ T_{yx}(x+dx, y) \\ Q_x(x+dx, y) \end{bmatrix} dy \quad (\text{B.10})$$

ここで関数内は z を省略して書いている。これ以降も省略する。また $T_{\alpha\beta}$ と Q_α はそれぞれ 2次元応力の z 方向の平均値であり

$$T_{\alpha\beta}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}(x, y) dz, \quad Q_\alpha(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha z}(x, y) dz, \quad (\text{B.11})$$

と定義してある。面 ABCD と反対の側の面 EFGH に作用する力は $\hat{e}_x \rightarrow -\hat{e}_x$, $x+dx \rightarrow x$

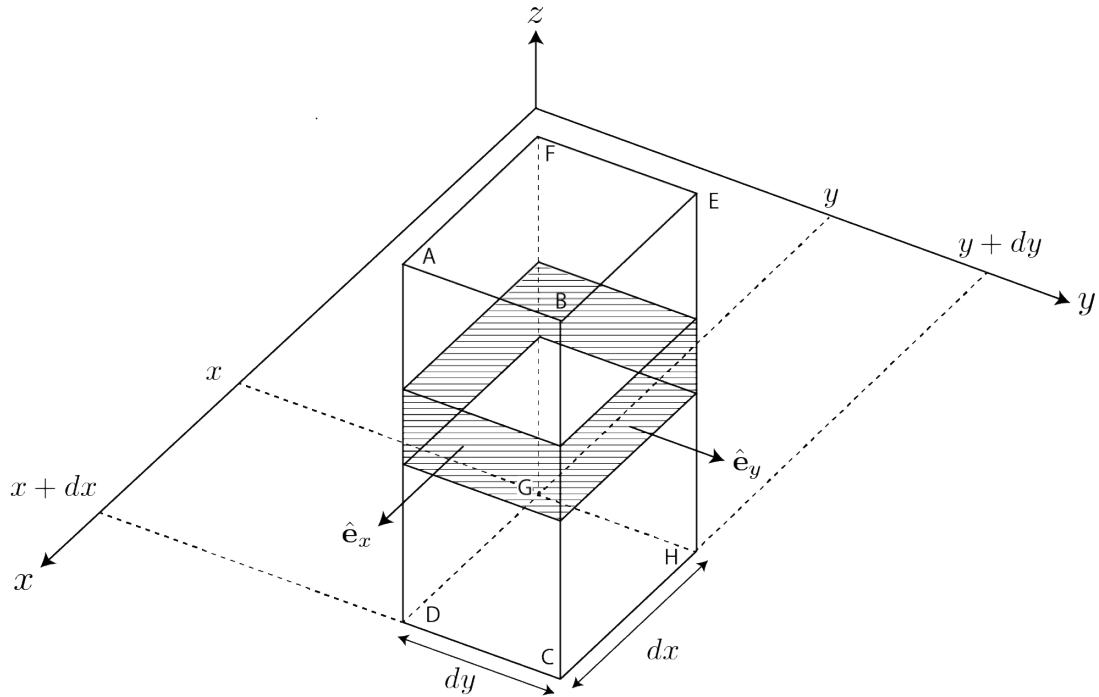


図 B.3. 厚さ h 、長さ dx, dy の薄い弾性板の微小体積要素。

と変形すると

$$-d\mathbf{F}^{(x)}(x, y) = \begin{bmatrix} -T_{xy}(x, y + dy) \\ -T_{yy}(x, y + dy) \\ -Q_y(x, y + dy) \end{bmatrix} dx \quad (\text{B.12})$$

である。また面 AFDG に作用する力 $-d\mathbf{F}^{(y)}(x, y)$ である。面 ABCD に作用するモーメントの総和 (y 方向の変化は積分すると高次の微小量) は

$$d\mathbf{m}^{(x)} = \mathbf{r} \times d\mathbf{f}^{(x)} = (-zdf_y^{(x)}, zdf_x^{(x)}, 0), \quad (\text{B.13})$$

$$d\mathbf{M}^{(x)} = \int d\mathbf{m}^{(x)} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} -z\sigma_{yx} \\ z\sigma_{yx} \\ 0 \end{pmatrix} dydz = \begin{pmatrix} -M_{yx} \\ M_{xx} \\ 0 \end{pmatrix} dy \quad (\text{B.14})$$

となる。ここで

$$M_{\alpha\beta}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{\alpha\beta}(x, y)dz \quad (\text{B.15})$$

は面内に働くモーメントを表す。他の面に対しても同様に計算できる。

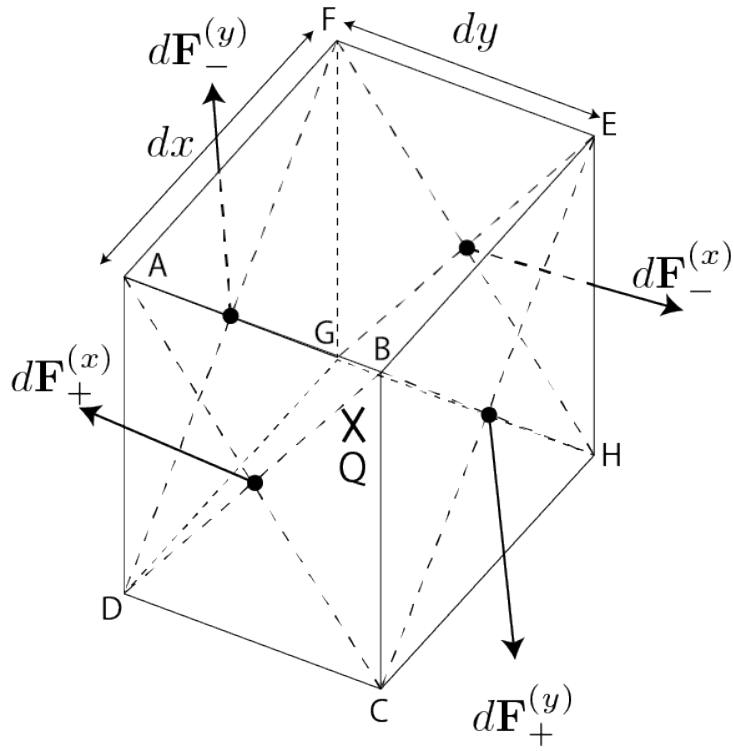


図 B.4. 薄い弾性板に働く力。

B.3 モーメントのつり合い

モーメントのつり合いについて考える (図 B.4)。高次微小なので微小体積内の変形は無視して剛体とみなす。重心 Q から

$$\begin{aligned}
 \text{ABCD へのベクトル} : \ell_x^{(+)} &= \left(\frac{dx}{2}, 0, 0\right) \\
 \text{EFGH へのベクトル} : \ell_x^{(-)} &= -\ell_x^{(+)} \\
 \text{BCHE へのベクトル} : \ell_y^{(+)} &= \left(\frac{dy}{2}, 0, 0\right) \\
 \text{ADGF へのベクトル} : \ell_y^{(-)} &= -\ell_y^{(+)}
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

Q まわりに作用する $d\mathbf{F}$ によるモーメント：

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{\ell}_x^{(+)} \times d\mathbf{F}_+^{(x)} + \boldsymbol{\ell}_x^{(-)} \times d\mathbf{F}_-^{(x)} + \boldsymbol{\ell}_y^{(+)} \times d\mathbf{F}_+^{(y)} + \boldsymbol{\ell}_y^{(-)} \times d\mathbf{F}_-^{(y)} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{dx}{2} dF_z^{(x)}(x+dx, y) \\ \frac{dx}{2} dF_z^{(x)}(x+dx, y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{dx}{2} dF_z^{(x)}(x, y) \\ \frac{dx}{2} dF_z^{(x)}(x, y) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{dy}{2} dF_z^{(y)}(x, y+dy) \\ \frac{dy}{2} dF_z^{(y)}(x, y+dy) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{dy}{2} dF_z^{(y)}(x, y) \\ \frac{dy}{2} dF_z^{(y)}(x, y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -Q_x(x, y) dxdy \\ T_{yx}(x, y) dxdy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_y(x, y) dxdy \\ 0 \\ -T_{xy}(x, y) dxdy \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Q_y(x, y) dxdy \\ -Q_x(x, y) dxdy \\ T_{yx}(x, y) - T_{xy}(x, y) dxdy \end{pmatrix}, \tag{B.17}
\end{aligned}$$

ここで最後の表記の z 成分は応力テンソルの対称性よりゼロになる。また

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{2} (-dF_z^{(x)}(x+dx, y) - dF_z^{(x)}(x, y)) &= \frac{dx}{2} (-Q_x(x+dx, y) - Q_x(x, y)) \\
&\approx -Q_x(x, y) dx, \tag{B.18}
\end{aligned}$$

などを用いた。微小体積要素のモーメントのつり合いの式

$$d\mathbf{M}^{(x)}(x+dx, y) + d\mathbf{M}^{(x)}(x, y) + d\mathbf{M}^{(y)}(x, y+dy) + d\mathbf{M}^{(y)}(x, y) + \begin{pmatrix} Q_y \\ -Q_x \\ 0 \end{pmatrix} dxdy = 0, \tag{B.19}$$

より

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned} & (-M_{yx}(x+dx, y) + M_{yx}(x, y)) dy + (-M_{yy}(x, y+dy) + M_{yy}(x, y)) dx \\ & (M_{xx}(x+dx, y) - M_{xx}(x, y)) dy + (M_{xy}(x, y+dy) - M_{xy}(x, y)) dx \end{aligned} \right] + \begin{pmatrix} Q_y \\ -Q_x \\ 0 \end{pmatrix} dxdy = 0, \tag{B.20}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x} M_{yx} - \frac{\partial}{\partial y} M_{yy} + Q_y \\ & \frac{\partial}{\partial x} M_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} M_{xy} - Q_x \end{aligned} \right] = 0 \tag{B.21}
\end{aligned}$$

結局

$$\partial_\beta M_{\alpha\beta} - Q_\alpha = 0, \tag{B.22}$$

となる。

B.3.1 力のつり合い

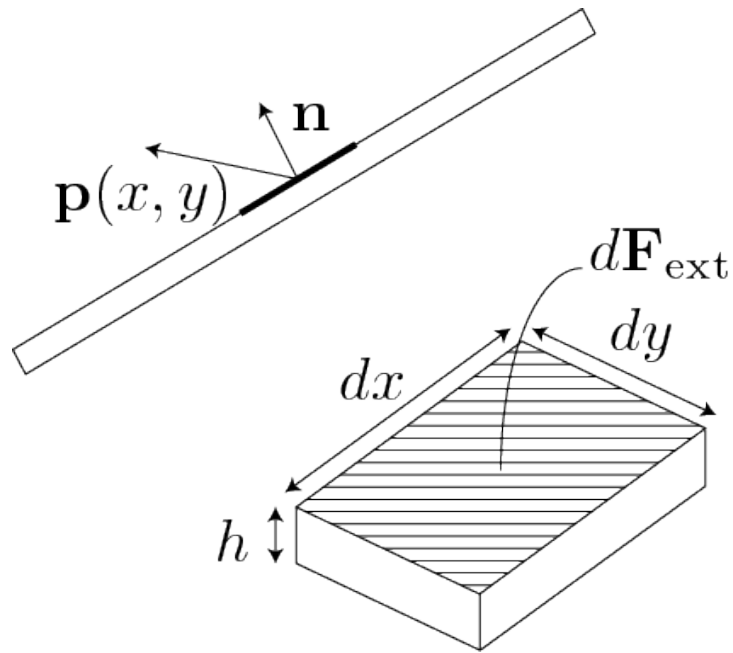


図 B.5. 薄い弾性板の表面に働く力 \mathbf{p} と微小体積要素に働く力 $d\mathbf{F}_{\text{ext}}$ 。

板の表面に、単位面積当たりの外力 $\mathbf{p}(x, y)$ が作用している時

$$d\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{p}(x, y) dx dy \quad (\text{B.23})$$

と表す (図 B.5)。つり合いの式

$$d\mathbf{F}_{+}^{(x)}(x + dx, y) + d\mathbf{F}_{-}^{(x)}(x, y) + d\mathbf{F}_{+}^{(y)}(x, y + dy) + d\mathbf{F}_{-}^{(y)}(x, y) + d\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}, \quad (\text{B.24})$$

より

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yx} \\ Q_x \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} T_{xy} \\ T_{yy} \\ Q_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (\text{B.25})$$

となる。

板面内のつり合いは

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} T_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{xy} + p_x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} T_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{yy} + p_y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} Q_x + \frac{\partial}{\partial y} Q_y + p_z = 0 \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

である。ここで3つめは板に垂直方向のつり合いである。ここで面内の応力は

$$T_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dz, \quad (\text{B.27})$$

なので板厚が十分小さいとき、 $\sigma_{\alpha\beta}$ は厚さ方向に一定。

$$T_{\alpha\beta} \approx h\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{(2D)} \quad (\text{B.28})$$

ここで

$$\nabla_{(2D)} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \mathbf{p}_{(2D)} = (p_x, p_y) \quad (\text{B.29})$$

とすると

$$\nabla_{(2D)}\sigma_{\alpha\beta}^{(2D)} + \mathbf{p}_{(2D)} = \mathbf{0} \quad (\text{B.30})$$

面内のつり合いは独立に成立する。弱く曲げられた弾性板の静力学方程式は

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} Q_x + \frac{\partial}{\partial y} Q_y + p_z = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} M_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} M_{xy} + Q_x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} M_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} M_{yy} + Q_y = 0 \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

もしくは

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} Q_\alpha + p_z = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_\beta} M_{\alpha\beta} + Q_\alpha = 0 \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

とも書ける。

B.3.2 構成関係式の導出

キルヒホッフの仮定より板の曲げが十分弱い時、板には中性面がある（ひずみなし）。中性面の変位ベクトルは $\mathbf{u}^{(0)} = (u_x^{(0)}, u_y^{(0)}, u_z^{(0)}) = (0, 0, w(x, y))$ となる。仮定として変形前に板の中性面に垂直であった線要素は板の変形後も中性面に対して垂直を保つ（図 B.6）。 ϵ の主要オーダー量に対して、 $\epsilon_{xz} = 0, \epsilon_{yz} = 0$ より、

$$\epsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \epsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0, \quad (\text{B.33})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (\text{B.34})$$

また

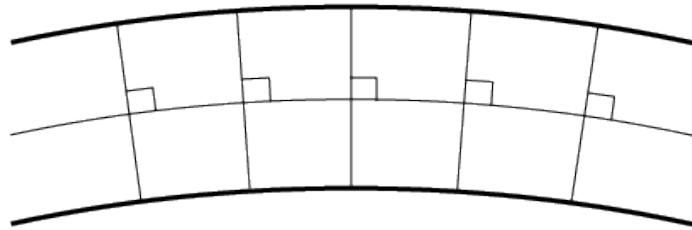
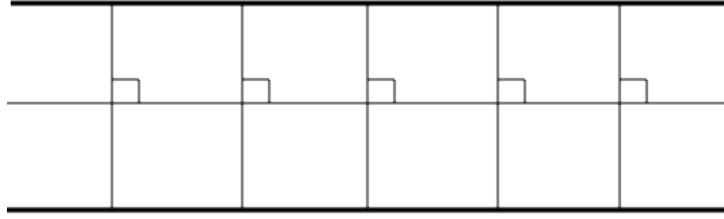
$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \Rightarrow u_z = u_z^{(0)} \equiv w(x, y), \quad (\text{B.35})$$

板全体に渡って厚み方向の応力成分は微小にとどまる（厚さに対して圧縮はなし）。

積分して

$$u_x = u_x^{(0)} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) z = - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) z, \quad u_y = u_y^{(0)} - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) z = - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) z, \quad (\text{B.36})$$

変形前



変形後

図 B.6. キルヒホッフの仮定。弱い変形の場合、変形後も板には中世面が存在する。変形前に板の中世面に垂直であった線要素は変形後も中世面に対して垂直を保つ。

ここでそれぞれ最右辺の w の微分は θ の回転で、付録 A.5.3 で議論した薄い板の曲げの内容である。よって変位ベクトルは

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{\partial w}{\partial x} z, -\frac{\partial w}{\partial x} z, w \right), \quad (\text{B.37})$$

またひずみ成分は

$$\epsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_{xy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \epsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0, \quad (\text{B.38})$$

となる。

キルヒホッフの仮定 (hypothesis) より

$$\epsilon_{\alpha z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x_\alpha} \right) = 0, \quad (\alpha = x, y) \quad (\text{B.39})$$

である。また $\sigma_{zz} = 0$ より、他の応力成分は

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}) \\ \sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\epsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \end{cases} \quad (\text{B.40})$$

であった。よって

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w \\ \sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w \end{cases} \quad (\text{B.41})$$

と表すことができる。キルヒホッフの仮定や $\sigma_{iz} = 0$ はそのオーダーでは妥当となる。今の議論は $w < h$ で妥当なので

$$w \sim \mathcal{O}(\epsilon), \epsilon = \frac{h}{L}, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy} \sim \epsilon, \quad (\text{B.42})$$

と表すことができる。つまり変形は板の厚み程度である。2次元の理論を展開する際の仮定

$$\sigma_{\alpha z} = \frac{E}{1+\nu}\epsilon_{\alpha z} = 0 \quad (\text{B.43})$$

を考えていく。境界条件は

$$\sigma_{xz}\left(z \pm \frac{h}{2}\right) = 0, \sigma_{yz}\left(z \pm \frac{h}{2}\right) = 0, \quad (\text{B.44})$$

である。また三次元的な力のつり合いの式は $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$ より、

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{yz} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.45})$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz} &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy}\right) = \frac{Ez}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 w) \\ \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{yz} &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy}\right) = \frac{Ez}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 w) \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

となるので積分を実行すると、

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 w), \quad (\text{B.47})$$

$$\sigma_{yz}(x, y, z) = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 w), \quad (\text{B.48})$$

ここで、 σ_{xz}, σ_{yz} 共に 2 次関数になっているので最大値は $z = 0$ で

$$\sigma_{xz}(z=0) \sim h^2 \nabla^2 w \sim \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad \sigma_{yz}(z=0) \sim \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (\text{B.49})$$

となる。また shear force Q_x は

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \sim h^3 \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (\text{B.50})$$

となる。次に σ_{zz} について考えていく。力の釣り合いの式より

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = - \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \sigma_{yzy} \right) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \nabla^2 \nabla^2 w \quad (\text{B.51})$$

を得る。しかし、 σ_{zz} は奇関数になってしまうため境界条件 $\sigma_{zz}(z = \pm \frac{h}{2}) = 0$ を満たす解はない。今は σ_{zz} のオーダーを求めたいので $\sigma_{zz}(z = h/2) = 0$ のもとで解を求めると

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = - \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^3}{12} - \frac{h^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) \nabla^2 \nabla^2 w \sim \mathcal{O}(\epsilon^4) \quad (\text{B.52})$$

となるので、 $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ のオーダーまででは $\sigma_{zz} = 0$ は正しい。よって

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w, \quad \sigma_{xz} = - \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w), \\ \sigma_{yy} &= - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w, \quad \sigma_{yz} = - \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w), \\ \sigma_{xy} &= - \frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sigma_{zz} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

モーメントは

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{\alpha\beta} dz \quad (\text{B.54})$$

これは stress couple と呼ばれる。shear force は

$$Q_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{z\alpha} dz \quad (\text{B.55})$$

これは stress resultants と呼ばれる。これらより

$$\begin{aligned} M_{xx} &= - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w(x, y) \\ M_{yy} &= - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w(x, y) \\ M_{xy} &= - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x, y) \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

また

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} - \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) dz \quad (\text{B.57})$$

なので

$$Q_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w), \quad Q_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \quad (\text{B.58})$$

力とモーメントのつりあいは

$$\begin{cases} \partial_\beta M_{\alpha\beta} - Q_\alpha = 0, \\ \partial_\alpha Q_\alpha + p = 0, \end{cases} \quad (\text{B.59})$$

であったので、2式から Q_α を消去すると

$$\partial_\alpha \partial_\beta M_{\alpha\beta} + p_z = 0, \quad (\text{B.60})$$

となる。書き下すと

$$\partial_x^2 M_{xx} + \partial_x \partial_y M_{xy} + \partial_y^2 M_{yy} + p_z = 0 \quad (\text{B.61})$$

である。ここで $M_{\alpha\beta}$ を代入すると微分演算子は

$$-\partial_x^2 (\partial_x^2 + \nu \partial_y^2) - 2(1-\nu) (\partial_x^2 \partial_y^2) - \partial_y^2 (\nu \partial_x^2 + \partial_y^2) \quad (\text{B.62})$$

となるので

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - p_z = 0, \quad (\text{B.63})$$

を得る。ここで

$$D \equiv \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{B.64})$$

は曲げ剛性率である。単位体積あたりの弾性エネルギー密度: $e_{el} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$, ($\epsilon_{\alpha z} = 0, \epsilon_{zz} = 0$) である。3次の項は掛け算で6次になるので無視する。これは計算を実行すると

$$e_{el} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + 2\sigma_{xy} \epsilon_{xy} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy}) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})^2 - 2(1-\nu)(\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} - \epsilon_{xy}^2) \right] \quad (\text{B.65})$$

となる。したがって

$$e_{el} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] \quad (\text{B.66})$$

系全体の弾性エネルギー

$$\mathcal{E}_{el} \int \int e_{el} dA dz = \int \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} dz [\dots] dA = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int [\dots] dA \quad (\text{B.67})$$

となるので

$$\mathcal{E}_{el} = \frac{1}{2} D \int \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dA, \quad (\text{B.68})$$

モンジュ・ゲージの平均曲率 H とガウス曲率 K は

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (\text{B.69})$$

$$K = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (\text{B.70})$$

なので、

$$\mathcal{E}_{\text{el}} = \frac{D}{2} \int [(2H)^2 - 2(1 - \nu)K] dA \quad (\text{B.71})$$

となる。また変分をとると

$$\delta \mathcal{E} = \int (D \nabla^2 \nabla^2 w) \delta w(x, y) dx dy \quad (\text{B.72})$$

なので、外力なしのときの板の曲げの方程式は

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = 0, \quad (\text{B.73})$$

である。また外力ありの時、位置エネルギーが $\delta U = - \int p \delta w dx dy$ とすると

$$\delta \mathcal{E}_{\text{tot}} = \delta \mathcal{E}_{\text{el}} - \int p \delta w dx dy \quad (\text{B.74})$$

より

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - p = 0, \quad (\text{B.75})$$

となる。

B.4 Shallow Shell Theory (Foppl-von Karman 方程式を含む)

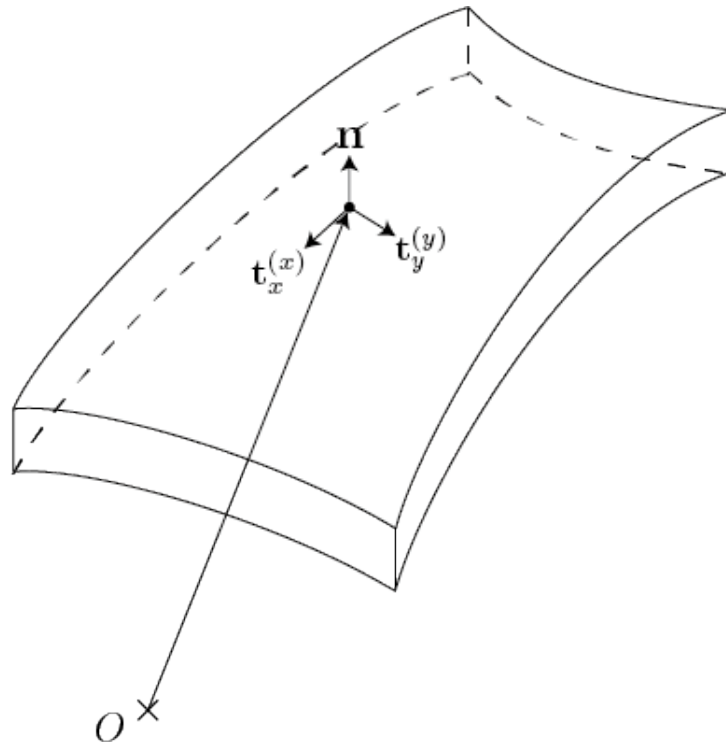


図 B.7. 自然状態で弱い曲率を持った薄膜（シェル）の中性面の各点で直交座標系を考える。

ここからはいよいよ、基準状態として弱い自発曲率を持った弾性薄膜、すなわち浅い弾性シェル (shallow elastic shell) を考えていく (図 B.7)。中性面の位置ベクトルを

$$\mathbf{r}_0(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} \quad (\text{B.76})$$

とあらわす。すると、シェル内部の任意の物質点の位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + z\hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} x - zf_x \\ y - zf_y \\ f + z \end{pmatrix} \quad (\text{B.77})$$

で表現することができる。ここで $(-h/2 \leq z \leq h/2)$ である。各点における接線および単位法線ベクトルはそれぞれ

$$\mathbf{t}_x = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x} = (1, 0, f_x), \quad (\text{B.78})$$

$$\mathbf{t}_y = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial y} = (0, 1, f_y), \quad (\text{B.79})$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{t}_x \times \mathbf{t}_y}{|\mathbf{t}_x \times \mathbf{t}_y|} \quad (\text{B.80})$$

とかける。変形によって $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ となった時に、shell 内部の任意の点における変位ベクトルは

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = u_\alpha(x, y, z)\mathbf{t}_\alpha + u_z(x, y, z)\hat{\mathbf{n}}, \quad (\alpha = x, y) \quad (\text{B.81})$$

とかけるであろう。とくに $z = 0$ の面 (中性面) の変位ベクトルを

$$\mathbf{u}(x, y, z = 0) = \bar{u}_\alpha\mathbf{t}_\alpha + \bar{u}_z\hat{\mathbf{n}} \quad (\text{B.82})$$

つまり

$$u_\alpha(x, y, z = 0) = \bar{u}_\alpha(x, y) \quad (\text{B.83})$$

$$u_z(x, y, z = 0) = \bar{u}_z(x, y) \equiv w(x, y) \quad (\text{B.84})$$

と表しておく (図 B.8)。

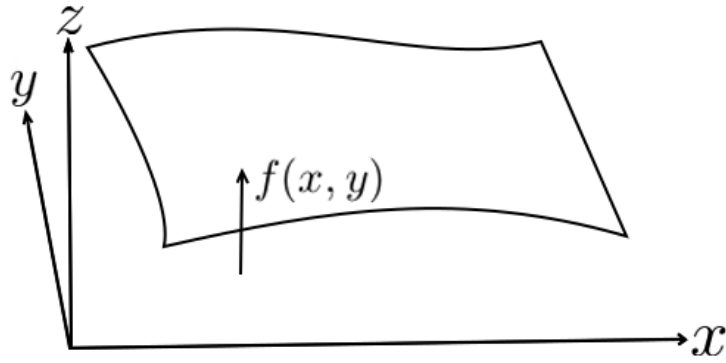


図 B.8. 弱い曲率を持った板の変形。

以下ではしばらく $f(x, y) = 0$ の平坦な薄板を考えていく。板の弱い変形の時と同様、キルヒホッフの仮定 (hypothesis) を採用する。

$$\epsilon_{\alpha z} = 0, \quad (\alpha = x, y) \quad (\text{B.85})$$

$u_z(x, y, z)$ の z 依存性を無視できる。

$$u_z(x, y, z) = \bar{u}_z(x, y, z) = w(x, y), \quad \epsilon_{\alpha z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x_\alpha} \right) = 0, \quad (\text{B.86})$$

より、($\epsilon_{zz} = 0$ と同じ仮定)

$$u_\alpha(x, y, z) = u_\alpha(x, y, z = 0) - z \frac{\partial u_z}{\partial x_\alpha} = \bar{u}_\alpha(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \quad (\text{B.87})$$

をえる。したがって、 xy 面内のひずみ場は

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta}(x, y, z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} \right) - z \partial_\alpha \partial_\beta w = \bar{\epsilon}_{\alpha\beta}(x, y) - z w_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (\text{B.88})$$

と計算できる。ここで

$$w_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \quad (\text{B.89})$$

は曲率テンソルの $\alpha\beta$ 成分である。さて、(B.88) 式の最初の等式の右辺は中性面の 2 次元のひずみ場である。対応する 2 次元弾性論のフック則は

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1+\nu} \epsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (\text{B.90})$$

である。これらより

$$\sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) = \frac{E}{1+\nu} \left(\bar{\epsilon}_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1+\nu} \bar{\epsilon}_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) - z \frac{E}{1+\nu} \left(w_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1+\nu} w_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (\text{B.91})$$

をえる。ここで、右辺の最初の括弧は $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}(x, y) = \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z=0)$ であるので、(B.88) を次のように書く：

$$\sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) = \bar{\sigma}_{\alpha\beta}(x, y) - z S_{\alpha\beta}(x, y) \quad (\text{B.92})$$

ここで

$$S_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu} \left(w_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1+\nu} w_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (\text{B.93})$$

とおいた。一方、薄板の弾性変形のエネルギーは

$$\mathcal{E}_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(x, y, z) \epsilon_{ij}(x, y, z) dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) \epsilon_{\alpha\beta}(x, y, z) dA dz \quad (\text{B.94})$$

である。ここで

$$\sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} = (\bar{\sigma}_{\alpha\beta} - z S_{\alpha\beta})(\bar{\epsilon}_{\alpha\beta} - z W_{\alpha\beta}) \quad (\text{B.95})$$

$$= \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} - z(\bar{\sigma}_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta} \bar{\epsilon}_{\alpha\beta}) + z^2 S_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} \quad (\text{B.96})$$

に注目する。最右辺の第 1 項は z によらない項、第 2 項は z の 1 次式、第 3 項は z の 2 次式の項である。両辺を $\int_{-h/2}^{h/2}$ で積分すると z の 1 次の項は消えるので、

$$\mathcal{E}_{\text{el}} = \frac{h}{2} \int \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} dA + \frac{1}{2} \int \left(\frac{h^3}{12} S_{\alpha\beta} \right) w_{\alpha\beta} dA, \quad (\text{B.97})$$

をえる。つぎに、同様にして曲げモーメントの計算をしておこう： $\sigma_{\alpha\beta} = \bar{\sigma}_{\alpha\beta} - z S_{\alpha\beta}$ を用いると

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}(x, y) &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz = - \left(\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \right) S_{\alpha\beta}(x, y) \\ &= - \frac{E h^3}{12(1+\nu)} \left(w_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1+\nu} w_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.98})$$

$$= -D [(1-\nu)w_{\alpha\beta} + \nu w_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}] \quad (\text{B.99})$$

となる。また、面内の二次元応力テンソルは

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(2D)} = \frac{Eh}{1+\nu} \left(\bar{\epsilon}_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) = Y [(1-\nu)\bar{\epsilon}_{\alpha\beta} + \nu\epsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \quad (\text{B.100})$$

と表すことができる。ここで $Y = Eh/(1-\nu^2)$ は面内の伸び剛性率である。

以上の議論から、板が十分薄い極限では、板の弾性変形のエネルギーは曲げの寄与 E_{bend} と伸びの寄与 E_{str} に分離することができる。

$$\mathcal{E}_{\text{el}} = \mathcal{E}_{\text{str}} + \mathcal{E}_{\text{bend}} \quad (\text{B.101})$$

ここでそれぞれのエネルギーは

$$\mathcal{E}_{\text{str}} = \int \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta}^{(2D)} \epsilon_{\alpha\beta} dA, \quad \mathcal{E}_{\text{bend}} = \int \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} w_{\alpha\beta} dA. \quad (\text{B.102})$$

である。面内の伸びエネルギーは厚み h の 1 乗、曲げエネルギーは厚み h の 3 乗に比例する事実がもっとも重要である。このような厚み h にかんするエネルギースケールの分離は、シェルの厚みが十分に薄いかぎり、以下で議論していく弾性シェルに対しても同様に成立する。

B.5 曲面の一般論による導出

B.5.1 変形前の曲面のかたち

曲面上の任意の点における、曲面上の座標系を (x^1, x^2) とする。ここでいきなり上付き文字が出てきたがこれは乗数ではないことに注意する。接線ベクトル (単位ベクトルでない) は、その定義より

$$\mathbf{t}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2) \quad (\text{B.103})$$

である。また単位法線ベクトルは

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2}{|\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2|} \quad (\text{B.104})$$

から知ることができる。計量テンソルは

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \mathbf{t}_\alpha \cdot \mathbf{t}_\beta \quad (\text{B.105})$$

で定義され、曲率テンソルは

$$\bar{\kappa}_{\alpha\beta} = -\mathbf{t}_\beta \cdot \partial_\alpha \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_\alpha \mathbf{t}_\beta \quad (\text{B.106})$$

で定義される量である。

B.5.2 曲面を記述する方程式

1. Weingarten 方程式 : $\partial_\alpha \hat{\mathbf{n}} = -\kappa_\alpha^\beta \mathbf{t}_\beta$
2. Gauss の方程式 : $\partial_\alpha \mathbf{t}_\beta = \bar{\kappa}_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{n}} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{t}_\gamma$

ここで $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ はクリストッフエル記号 (接続) であり $\mathcal{O}(g_{\alpha\beta}^2)$ である。変位ベクトルを

$$\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{t}_\alpha + w \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{B.107})$$

とする。位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}, \quad (\text{B.108})$$

である。接線ベクトルは

$$\mathbf{t}'_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (u^\beta \mathbf{t}_\beta + w \hat{\mathbf{n}}) \quad (\text{B.109})$$

$$= \mathbf{t}_\alpha + (\partial_\alpha u^\beta) \mathbf{t}_\beta + u^\beta (\partial_\alpha \mathbf{t}_\beta) + (\partial_\alpha w) \hat{\mathbf{n}} + w (\partial_\alpha \hat{\mathbf{n}}) \quad (\text{B.110})$$

となる。ここで右辺第 2 項には Gauss の方程式、右辺第 3 項には Weingarten 方程式を代入すると

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'_\alpha &= \mathbf{t}_\alpha + (\partial_\alpha u^\beta) \mathbf{t}_\beta + u^\beta (\bar{\kappa}_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{n}}) + u^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{t}_\gamma + (\partial_\alpha w) \hat{\mathbf{n}} - \bar{\kappa}_\alpha^\beta w \mathbf{t}_\beta \\ &= \mathbf{t}_\alpha + (\partial_\alpha u^\beta + u^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta - \bar{\kappa}_\alpha^\beta) \mathbf{t}_\beta + (\partial_\alpha w u^\beta \bar{\kappa}_{\alpha\beta}) \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (\text{B.111})$$

をえる。ここで

$$\nabla_\alpha u^\beta = \partial_\alpha u^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta u^\gamma \quad (\text{B.112})$$

は共変微分である。接線ベクトルの変化

$$\mathbf{t}'_\alpha = \mathbf{t}_\alpha + (\nabla_\alpha u^\beta - \bar{\kappa}_\alpha^\beta w) \mathbf{t}_\beta + (\partial_\alpha w + u^\beta \bar{\kappa}_{\alpha\beta}) \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{B.113})$$

の最右辺の第 3 項を S_α^β 、第 5 項を W_α とかくと

$$\mathbf{t}'_\alpha = \mathbf{t}_\alpha + S_\alpha^\beta \mathbf{t}_\beta + W_\alpha \hat{\mathbf{n}}, \quad (\text{B.114})$$

である。これを使うと、変形後の計量テンソルは

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \mathbf{t}'_\alpha \cdot \mathbf{t}'_\beta = (\mathbf{t}_\alpha + S_\alpha^\gamma \mathbf{t}_\gamma + W_\alpha \hat{\mathbf{n}}) (\mathbf{t}_\beta + S_\beta^\delta \mathbf{t}_\delta + W_\beta \hat{\mathbf{n}}) \\ &= \mathbf{t}_\alpha \cdot \mathbf{t}_\beta S_\alpha^\gamma (\mathbf{t}_\gamma \cdot \mathbf{t}_\beta) + S_\beta^\delta (\mathbf{t}_\alpha \cdot \mathbf{t}_\delta) + w_\alpha w_\beta + S_\alpha^\gamma S_\beta^\delta + S_\alpha^\gamma S_\beta^\delta (\mathbf{t}_\gamma \cdot \mathbf{t}_\delta) \\ &= \bar{g}_{\alpha\beta} + \bar{g}_{\gamma\beta} S_\alpha^\gamma + \bar{g}_{\alpha\delta} S_\beta^\delta + w_\alpha w_\beta \\ &= \bar{g}_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha} + S_{\alpha\beta} + S_{\alpha\gamma} S_\beta^\delta + w_\alpha w_\beta \end{aligned} \quad (\text{B.115})$$

とあらわされる。ひずみテンソルは一般に

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} - \bar{g}_{\alpha\beta}) \quad (\text{B.116})$$

で与えられる。これは次のように理解できる。曲面上の位置ベクトル

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2) \quad (\text{B.117})$$

に対して

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \mathbf{t}_\alpha dx^\alpha \quad (\text{B.118})$$

より、線素は

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{t}_\alpha dx^\alpha)(\mathbf{t}_\beta dx^\beta) = (\mathbf{t}_\alpha \cdot \mathbf{t}_\beta) dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\text{B.119})$$

である。変形前と変形後の線素は、それぞれ

$$\begin{aligned} (d\mathbf{r}')^2 &= ds'^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ ds^2 &= \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \end{aligned} \quad (\text{B.120})$$

であるから、ひずみの定義より

$$ds'^2 = ds^2 + 2\epsilon_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \rightarrow \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{ds'^2 - ds^2}{dx^\alpha dx^\beta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} - \bar{g}_{\alpha\beta}) \quad (\text{B.121})$$

を得る。よって

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (S_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2} S_{\alpha\gamma} S_{\beta}^\gamma + \frac{1}{2} w_\alpha w_\beta \quad (\text{B.122})$$

変形後の曲面の曲率テンソルは

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\mathbf{t}'_\beta \cdot \partial_\alpha \hat{\mathbf{n}}' \quad (\text{B.123})$$

$$= \hat{\mathbf{n}}' \cdot \partial_\alpha \mathbf{t}'_\beta \approx \hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_\alpha \mathbf{t}'_\beta \quad (\text{B.124})$$

となる。ここで最後に $\hat{\mathbf{n}}' \approx \hat{\mathbf{n}}$ の近似を行った。また変形後の単位接線ベクトルの微分は

$$\partial_\alpha \mathbf{t}'_\beta = \partial_\alpha (\mathbf{t}_\beta + S_{\beta}^\gamma \mathbf{t}_\gamma + w_\beta \hat{\mathbf{n}}) = \partial_\alpha \mathbf{t}_\beta + (\partial_\alpha S_{\beta}^\alpha) \mathbf{t}_\gamma + S_{\beta}^\gamma (\partial_\alpha \mathbf{t}_\gamma) + (\partial_\alpha w_\beta) \hat{\mathbf{n}} + w_\beta (\partial_\alpha \hat{\mathbf{n}}) \quad (\text{B.125})$$

と表すことができる。ここで第3項と第5項には Gauss の方程式と Weingarten 方程式をそれぞれ代入する。また $\hat{\mathbf{n}}$ と内積をとると

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_\alpha \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_\alpha \mathbf{t}_\gamma = \bar{\kappa}_{\alpha\gamma} \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{t}_\gamma = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_\alpha \mathbf{t}_\gamma = \bar{\kappa}_{\alpha\beta} \end{array} \right. \quad (\text{B.126})$$

となる。したがって

$$\kappa_{\alpha\beta} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_\alpha \mathbf{t}'_\beta = \bar{\kappa}_{\alpha\beta} + S_{\beta}^\gamma \bar{\kappa}_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha w_\beta \quad (\text{B.127})$$

を得る。shallow shell の近似を適用する。微小量のオーダーを ϵ とすると

$$\bar{\kappa}_{\alpha\beta} \sim \mathcal{O}(\epsilon), \quad \bar{g}_{\alpha\beta} \sim \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \sim \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad w \sim \mathcal{O}(\epsilon), \quad u^\alpha \sim \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{B.128})$$

変形後の変数について $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ まで残すと

$$\begin{aligned} S_\alpha^\beta &= \nabla_\alpha u^\beta - \bar{\kappa}_\alpha^\beta w = (\partial_\alpha u^\beta + \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta u^\gamma) - \bar{\kappa}_\alpha^\beta w \approx \partial_\alpha u^\beta + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ w_\alpha &= \partial_\alpha w + \bar{\kappa}_{\alpha\beta} u^\beta \approx \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (\text{B.129})$$

となり、面内ひずみ場は

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(S_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha} + g_{\gamma\delta} S_\alpha^\delta S_\beta^\delta + w_\alpha w_\beta) \quad (\text{B.130})$$

$$\approx \frac{1}{2} \left[(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) - \bar{\kappa}_{\alpha\beta} w + \frac{1}{2}(w_\alpha)(w_\beta) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right] \quad (\text{B.131})$$

となる。したがって

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \left[(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) - \bar{\kappa}_{\alpha\beta} w + \frac{1}{2}(w_\alpha)(w_\beta) \right] \quad (\text{B.132})$$

を得る。また曲率テンソルは

$$\kappa_{\alpha\beta} = \bar{\kappa}_{\alpha\beta} + \partial_\alpha w_\beta + \bar{\kappa}_{\alpha\gamma} S_\beta^\gamma = \bar{\kappa}_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \partial_\beta w - \bar{\kappa}_{\alpha\gamma} \bar{\kappa}_\beta^\gamma w + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (\text{B.133})$$

である。ここで最右辺の第3項の部分は $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ なので、極座標などで普通は残ってくる曲率の補正の項 (w/R^2 のような) は無視する。最終的に、簡単な結果

$$\kappa_{\alpha\beta} - \bar{\kappa}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial_\beta w \quad (\text{B.134})$$

をえる。さきのセクションで議論したとおり、曲面の弾性エネルギーは

$$\mathcal{E}_{\text{el}} = \mathcal{E}_{\text{str}} + \mathcal{E}_{\text{bend}} \quad (\text{B.135})$$

であり

$$\mathcal{E}_{\text{str}} = \int \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} dA, \quad \mathcal{E}_{\text{bend}} = \int \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta} dA \quad (\text{B.136})$$

となる。ここで

$$dA = \sqrt{g} dx^1 dx^2 \quad (\text{B.137})$$

となる。また $\sigma_{\alpha\beta}$ と $\epsilon_{\alpha\beta}$ の関係と $M_{\alpha\beta}$ と $\kappa_{\alpha\beta}$ の関係は以前に求めたとおりである。

B.6 力のつり合いの式の導出

変形において $\delta \mathbf{r}$ に関する変分を取る。面外変位 δw 、面内変位 δu^α は独立であると考えらる。板の表面に作用する単位面積あたりの外力 \mathbf{r} で $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$ (仮想変位) になったとすると、外力 \mathbf{p} がした仕事は

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_A \mathbf{p}_\alpha \cdot \delta \mathbf{r} dA = \int_A p_\alpha \delta u_\alpha dA + \int_A p \delta w dA \quad (\text{B.138})$$

となる。ここで

$$\mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r} = p_\alpha \delta u^\alpha + p_\alpha \delta w \quad (\text{B.139})$$

であるが、計量がほとんど変化しない微小ひずみの近似の上では計量テンソルは単位テンソルになるので $u^\alpha = u_\alpha$ となる。この仮想変位に伴う弾性エネルギーの変化: $\delta\mathcal{E}_{el}$ は

$$\begin{aligned} \text{系全体のエネルギー変化: } \delta\mathcal{E}_{el} - \delta W \\ \text{力の釣り合い状態: } \delta\mathcal{E}_{tot} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.140})$$

となる。ここで

$$\delta\mathcal{E}_{el} = \delta\mathcal{E}_{str} + \delta\mathcal{E}_{bend} \quad (\text{B.141})$$

であり、

$$\mathcal{E}_{str} = \int \frac{h}{2} \sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} dA \quad (\text{B.142})$$

である。変分をとると

$$\delta\mathcal{E}_{str} = \int \frac{h}{2} [\delta\sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} \delta\epsilon_{\alpha\beta}] dA \quad (\text{B.143})$$

となる。ここで σ と ϵ は微小ひずみの理論では線形の関係式があるので、結局

$$\delta\mathcal{E}_{str} = h \int \sigma_{\alpha\beta} \delta\epsilon_{\alpha\beta} dA \quad (\text{B.144})$$

またひずみの変分は

$$\delta\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\partial_\alpha(\delta u_\beta + \partial_\beta(\delta u_\alpha))] - \bar{\kappa}_{\alpha\beta} \delta w + \frac{1}{2} [\partial_\alpha(\delta w)] \partial_\beta w + \frac{1}{2} (\partial_\alpha w) [\partial_\beta(\delta w)] \quad (\text{B.145})$$

ここで

$$\sigma_{\alpha\beta} \delta\epsilon_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} \delta\epsilon_{\beta\alpha} \quad (\text{B.146})$$

より

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} \delta\epsilon_{\alpha\beta} &= \sigma_{\alpha\beta} \partial_\beta(\delta u_\alpha) - \sigma_{\alpha\beta} \bar{\kappa}_{\alpha\beta} \delta w + \sigma_{\alpha\beta} (\partial_\alpha w) \partial_\beta(\delta w) \\ &= \partial_\beta(\sigma_{\alpha\beta} \delta u_\alpha) - (\partial_\beta \sigma_{\alpha\beta}) \delta u_\alpha - \sigma_{\alpha\beta} \bar{\kappa}_{\alpha\beta} \delta w + \partial_\beta [(\sigma_{\alpha\beta} \partial_\alpha w) \delta w] \end{aligned} \quad (\text{B.147})$$

ここで最右辺の第1項と第4項は2次元の発散より境界積分に置き換わる。

B.7 2次元の Gauss の定理

2次元のベクトル場 $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ に対して (図 B.9)

$$\int_A \nabla \cdot \mathbf{F} dA = \int_A \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{B.148})$$

$$= \oint_{C=\partial A} (-F_x dy + F_y dx) = \oint (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds \quad (\text{B.149})$$

が成り立つ。ここで曲線 C は $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$ であらわされ、 s は C の弧長パラメータである。単位接線ベクトルは

$$\hat{\mathbf{t}}(s) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s} \right), \quad (\text{B.150})$$

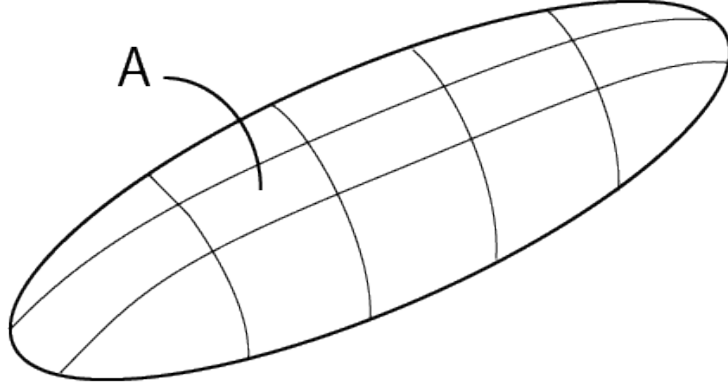


図 B.9. 面積 A の微小面積要素。

また外向き単位法線ベクトルは

$$\hat{\mathbf{n}}(s) = \left(-\frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial s} \right) \quad (\text{B.151})$$

である。ここで

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -F_x \frac{\partial y}{\partial s} + F_y \frac{\partial x}{\partial s} \quad (\text{B.152})$$

となるので

$$\begin{aligned} (\text{境界項}) &= h \int_A \partial_\beta [\sigma_{\alpha\beta} \delta u_\alpha + \sigma_{\alpha\beta} (\partial_\alpha w)] \delta w dA \\ &= h \int_A [\sigma_{\alpha\beta} \delta u_\alpha + \sigma_{\alpha\beta} (\partial_\alpha w)] \delta w \cdot n_\alpha dA, \end{aligned} \quad (\text{B.153})$$

$$\delta \mathcal{E}_{\text{str}} = (\text{境界項}) - h \int [(\partial_\alpha \sigma_{\alpha\beta} \delta u_\alpha) + \{\bar{\kappa}_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \partial_\beta (\sigma_{\alpha\beta} \partial_\alpha w)\} \delta w], \quad (\text{B.154})$$

をえる。

$$\kappa_{\alpha\beta} = \bar{\kappa}_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \partial_\beta w \rightarrow \delta \kappa_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \partial_\beta \delta w \quad (\text{B.155})$$

より

$$\delta \mathcal{E}_{\text{bend}} = \int M_{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta} dA \quad (\text{B.156})$$

ここで

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} [\partial_\alpha \partial_\beta (\delta w)] &= \partial_\beta [M_{\alpha\beta} \partial_\alpha (\delta w)] - (\partial_\beta M_{\alpha\beta}) \partial_\beta (\delta w) \\ &= \partial_\beta [M_{\alpha\beta} \partial_\alpha (\delta w)] - \partial_\alpha [(\partial_\beta M_{\alpha\beta}) (\delta w)] + (\partial_\alpha \partial_\beta M_{\alpha\beta}) \delta w \end{aligned} \quad (\text{B.157})$$

であるが、最右辺の第 1 項と第 2 項は境界項を与える。したがって

$$\delta \mathcal{E}_{\text{bend}} = \oint_{\partial A} [M_{\alpha\beta} \partial_\beta (\delta w)] n_\beta ds - \oint_{\partial A} [(\partial_\beta M_{\alpha\beta} \delta w)] n_\alpha ds + \int_A (\partial_\alpha \partial_\beta M_{\alpha\beta}) \delta w dA \quad (\text{B.158})$$

となる。よって仮想仕事の原理から

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{E}_{\text{tot}} = & \left. \begin{aligned} & h \oint_{\partial A} [\sigma_{\alpha\beta} \delta u_{\alpha} + \sigma_{\alpha\beta} (\partial_{\alpha} w) \delta w] n_{\beta} ds \\ & + \oint_{\partial A} M_{\alpha\beta} \partial_{\beta} (\delta w) n_{\alpha} ds \\ & - \oint_{\partial A} (\partial_{\alpha} M_{\alpha\beta}) \delta w n_{\beta} ds \end{aligned} \right\} \text{境界項} \\
 & + \left. \begin{aligned} & \int_A \{ \partial_{\alpha} \partial_{\beta} M_{\alpha\beta} - h [\bar{\kappa}_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \partial_{\beta} (\sigma_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} w)] \} \delta w dA \\ & - h \int_A (\partial_{\beta} \sigma_{\alpha\beta}) \delta u_{\alpha} dA - \int_A (p_{\alpha} \delta u_{\alpha} + p \delta w) dA \end{aligned} \right\} \text{媒質内部} \\
 & = 0, \quad (\text{B.159})
 \end{aligned}$$

をえる。境界項から、板の境界のいたるところで

$$\left[\begin{aligned} & \sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} = 0 : \text{面内でのストレスフリーの条件} \\ & [\partial_{\alpha} M_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta} (\partial_{\alpha} w)] n_{\beta} = 0 : \text{面外でのモーメントフリーの条件} \\ & M_{\alpha\beta} n_{\beta} = 0 : \text{面内でのモーメントフリーの条件} \end{aligned} \right] \quad (\text{B.160})$$

であることが要請される。これが境界条件を与える。また、力の釣り合いの式として

$$\begin{aligned} & h \partial_{\beta} \sigma_{\alpha\beta} + p_{\alpha} = 0 : \text{面内の釣り合い} \\ & \partial_{\alpha} \partial_{\beta} M_{\alpha\beta} - h [\bar{\kappa}_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \partial_{\beta} (\sigma_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} w)] = p : \text{面外の釣り合い} \end{aligned} \quad (\text{B.161})$$

をえる。ここでとくに、外力 $p_{\alpha} = 0$ のとき、面内の釣り合いは $\partial_{\beta} \sigma_{\alpha\beta} = 0$ となる。成分を書き下すと

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \\ & \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.162})$$

である。ここで

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (\text{B.163})$$

というスカラー関数 $\varphi = \varphi(x, y)$ を導入すると $\partial_{\beta} \sigma_{\alpha\beta} = 0$ は自動的に満たされる。代入すると

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi = 0, \\ & \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi = 0, \end{aligned} \right. \quad (\text{B.164})$$

のように確認できる。また $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ を利用すると

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{B.165})$$

となる。このスカラー関数 $\varphi = \varphi(x, y)$ は Airy の応力関数と呼ばれる。

次に面外のつり合いの式

$$\partial_\alpha \partial_\beta M_{\alpha\beta} - h\bar{\kappa}_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - h(\partial_\beta \sigma_{\alpha\beta})\partial_\alpha w - h\sigma_{\alpha\beta}\partial_\alpha \partial_\beta w = p, \quad (\text{B.166})$$

であるが、これは

$$\partial_\alpha \partial_\beta M_{\alpha\beta} - h\kappa_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = p \quad (\text{B.167})$$

とまとめられる。ここで

$$M_{\alpha\beta} = D[(1 - \nu)w_{\alpha\beta} + \nu w_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \quad (\text{B.168})$$

より

$$\partial_\alpha \partial_\beta M_{\alpha\beta} = D[(1 - \nu)\partial_\alpha^2 \partial_\beta^2 w + \nu\partial_\alpha^2 w_{\beta\beta}] = D\nabla^2 \nabla^2 w \quad (\text{B.169})$$

となる。また

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} &= \kappa_{xx}\partial_y^2 \varphi - 2\kappa_{xy}\partial_x \partial_y \varphi + \kappa_{yy}\partial_x^2 \varphi \\ &= [\bar{\kappa}_{xx}\partial_y^2 \varphi - 2\bar{\kappa}_{xy}\partial_x \partial_y \varphi + \bar{\kappa}_{yy}\partial_x^2 \varphi] \\ &\quad + (\partial_x^2 w)(\partial_y^2 \varphi) - 2(\partial_x \partial_y w)(\partial_x \partial_y \varphi) + (\partial_y^2 w)(\partial_x^2 \varphi) \end{aligned} \quad (\text{B.170})$$

ここで最後の3項は

$$\{f, g\} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \quad (\text{B.171})$$

を用いて表す。まとめると

$$D\nabla^2 \nabla^2 w + \nabla_\kappa^2 \varphi = p - \{w, \varphi\} \quad (\text{B.172})$$

となる。ここで微分演算子は

$$\nabla_\kappa^2 = \bar{\kappa}_{xx}\partial_y^2 - 2\bar{\kappa}_{xy}\partial_x \partial_y + \bar{\kappa}_{yy}\partial_x^2 \quad (\text{B.173})$$

と定義している。両立性の条件 (Compatibility) は純2次元ひずみ場では

$$\epsilon_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) \quad (\text{B.174})$$

より

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}^{(0)}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}^{(0)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}^{(0)}}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{B.175})$$

となる。また構成関係式は

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1 - \nu^2} [(1 - \nu)\epsilon_{\alpha\beta} + \nu\epsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \quad (\text{B.176})$$

であった。対角成分は

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{E}{1 - \nu^2}(1 + \nu)\epsilon_{\alpha\alpha} = \frac{E}{1 - \nu}\epsilon_{\alpha\alpha}, \quad (\text{B.177})$$

である。これをもとの構成関係式に代入することによって

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu)\epsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu(1-\nu)}{E}\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} \right] = \frac{E}{1+\nu}\epsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.178})$$

となる。これより

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} \quad (\text{B.179})$$

である。これを

$$\epsilon_{\alpha\beta}^{(0)} = \epsilon_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta}w - \frac{1}{2}\partial_\alpha w \partial_\beta w \quad (\text{B.180})$$

に代入していく。成分ごとに表すと

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}^{(0)} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \kappa_{xx}w - \frac{1}{2}(\partial_x w)^2 \\ \epsilon_{xy}^{(0)} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} + \kappa_{xy}w - \frac{1}{2}\partial_x w \partial_y w \\ \epsilon_{yy}^{(0)} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \kappa_{yy}w - \frac{1}{2}(\partial_y w)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.181})$$

ここに両立性の条件に代入し、エアリー関数を用いると

$$\begin{aligned} &\frac{1}{E}(\partial_y^4 + 2\partial_x^2\partial_y^2 + \partial_x^4)\varphi - \frac{\nu}{E}(\partial_x^2\partial_y^2 - 2\partial_x^2\partial_y^2 + \partial_x^2\partial_y^2)\varphi + (\kappa_{xx}\partial_y^2 - 2\kappa_{xy}\partial_x\partial_y + \kappa_{yy}\partial_x^2)w \\ &- (\partial_x w)(\partial_x\partial_y^2 w) - (\partial_x\partial_y w)^2 \\ &+ (\partial_x^2\partial_y w)(\partial_y w) + (\partial_x\partial_y w)^2 + (\partial_x^2 w)(\partial_y^2 w) + (\partial_x w)(\partial_x\partial_y^2 w) \\ &- (\partial_x\partial_y w)^2 - (\partial_x^2\partial_y w)(\partial_y w) \\ &= \frac{1}{E}\nabla^2\nabla^2\varphi + \nabla_\kappa^2 w - \frac{1}{2}\{w, w\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.182})$$

となる。以上より

$$\begin{cases} D\nabla^2\nabla^2 w - h\nabla_\kappa^2\varphi = p - \{w, \varphi\} \\ \frac{1}{E}\nabla^2\nabla^2\varphi + \nabla_\kappa^2 w = \frac{1}{2}\{w, w\} \end{cases} \quad (\text{B.183})$$

となる。これは Donnell-Mushtari-Vlasov 方程式として知られている。平坦な板 $\kappa_{\alpha\beta} = 0, \nabla_\kappa^2 = 0$ に対しては

$$\begin{cases} D\nabla^2\nabla^2 w + \{w, \varphi\} = p \\ \frac{1}{E}\nabla^2\nabla^2\varphi - \frac{1}{2}\{w, w\} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.184})$$

となる。これは Foppl-von Karman 方程式として知られている。さらにこの方程式を線形化した

$$\begin{cases} D\nabla^2\nabla^2 w = p \\ \frac{1}{E}\nabla^2\nabla^2\varphi = 0 \end{cases} \quad (\text{B.185})$$

は Kirchhoff(-Love) 方程式として知られている。これは純2次元ならエアリー関数は重調和関数になることを表している。またこの方程式は変位が厚み程度、つまり $u \sim t$ で成立する。

付録 C

曲面の微分幾何

C.1 第一基本形式

曲面の位置座標は助変数 (u, v) を用いて、 $\mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ と表すことができる。このとき、この全微分は $d\mathbf{p} = \mathbf{p}_u du + \mathbf{p}_v dv = (dx, dy, dz)$ となる。ここで $\mathbf{p}_u = \partial\mathbf{p}/\partial u$ などである。曲面上の 2 点間の距離は

$$\begin{aligned} ds^2 &= |\mathbf{p}(u + du, v + dv) - \mathbf{p}(u, v)|^2 \\ &\approx \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u (du)^2 + 2\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v du dv + \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v (dv)^2, \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

となる。これより

$$(ds)^2 = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix},$$

$$E = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u, \quad F = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v, \quad G = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \quad (\text{C.2})$$

と表すことができる。ここで E, F, G は第一基本量と呼ばれ、曲面の長さや角度を表す量である [80]。古典的な微分幾何では、上記のように二行二列の行列を用いて幾何学量が表される。しかしテンソル解析を用いた、より一般的な手法を用いて、同様の議論を進めることができる。位置ベクトル $\mathbf{r} = (\xi^1, \xi^2)$ と計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ を用いると

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (\text{C.3})$$

となる。ここで接線ベクトルを

$$\mathbf{t}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^\alpha} \quad (\text{C.4})$$

を用いると計量テンソルは

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\alpha \cdot \mathbf{t}_\alpha & \mathbf{t}_\alpha \cdot \mathbf{t}_\beta \\ \mathbf{t}_\beta \cdot \mathbf{t}_\alpha & \mathbf{t}_\beta \cdot \mathbf{t}_\beta \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

と表すことができる。

C.2 第二基本形式

$$\Pi = - \begin{pmatrix} d\hat{\mathbf{n}} & d\mathbf{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\hat{\mathbf{n}} \\ d\mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

ここで L, M, N は第二基本量と呼ばれ、曲面の曲がりぐあいを表す量である。また第二基本形式は

$$d\hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha = \partial_\alpha \hat{\mathbf{n}} d\xi^\alpha, \quad d\mathbf{r} = \mathbf{t}_\beta d\xi^\beta \quad (\text{C.7})$$

を用いると

$$\Pi = \left(\mathbf{t} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial \xi^\alpha} \right) d\xi^\alpha d\xi^\beta = K_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (\text{C.8})$$

と表すことができる。ここで

$$K_{\alpha\beta} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_\alpha \mathbf{t}_\beta = -\mathbf{t}_\beta \cdot \partial_\alpha \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{C.9})$$

は曲率テンソルと呼ばれ、曲面の曲がり具合を表す量である。これは次のように理解できる。曲面上のある点 P での法線ベクトルを $\hat{\mathbf{n}}_P$ とする。このときの点 P における曲率は「点 P から ξ^α の増加する方向に進むとき \mathbf{t}_β が $\hat{\mathbf{n}}_P$ に対してどのように変化（回転）するか」をもって知らされる。つまり \mathbf{t}_β の変化は

$$\mathbf{t}_\beta(P^\alpha + d\xi^\alpha) - \mathbf{t}_\beta(P^\alpha) = \frac{\partial \mathbf{t}_\beta}{\partial \xi^\alpha}(P) d\xi^\alpha = \partial_\alpha \mathbf{t}_\beta(P) d\xi^\alpha \quad (\text{C.10})$$

と表すことができるので曲率テンソルは上で表したように記述できる。

C.3 Weingarten 方程式

Weingarten 方程式は、法線ベクトルの変化を曲率テンソルと接線ベクトルを用いて表したもので、次のような方程式である：

$$\partial_\alpha \hat{\mathbf{n}} = -K_\alpha^\beta \mathbf{t}_\beta \quad (\text{C.11})$$

証明

法線ベクトルの微分が次の形にかけるとする：

$$\partial_\alpha \hat{\mathbf{n}} = C_\alpha \hat{\mathbf{n}} + D_\alpha^\beta \mathbf{t}_\beta \quad (\text{C.12})$$

この方程式の両辺に $\hat{\mathbf{n}}$ をかけると左辺は

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_\alpha \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} \partial_\alpha (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = 0, \quad (\text{C.13})$$

となる。ここで $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$ をもちいた。右辺は

$$C_\alpha \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} + D_\alpha^\beta \mathbf{t}_\beta \cdot \hat{\mathbf{n}} = C_\alpha = 0, \quad (\text{C.14})$$

となる。ここで接線ベクトルと法線ベクトルは直交する $\mathbf{t}_\beta \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ を用いた。次に式 (C.14) の両辺に \mathbf{t}_β をかけると

$$D_\alpha^\beta = \mathbf{t}_\beta \cdot \partial_\alpha \hat{\mathbf{n}}, \quad (\text{C.15})$$

となる。ここで $\mathbf{t}_\beta = g^{\beta\gamma} \mathbf{t}_\gamma$, $\mathbf{t}_\gamma \cdot \partial_\alpha \hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_\alpha \mathbf{t}_\gamma$, $K_{\alpha\gamma} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_\alpha \mathbf{t}_\gamma$ などを用いると

$$D_\alpha^\beta = g^{\beta\gamma} \mathbf{t}_\gamma \cdot \partial_\alpha \hat{\mathbf{n}} = -g^{\beta\gamma} \hat{\mathbf{n}} \cdot \partial_\alpha \mathbf{t}_\gamma = -g^{\beta\gamma} K_{\alpha\gamma} = K_\alpha^\beta \quad (\text{C.16})$$

を得る。

C.4 クリストッフエル記号

クリストッフエル (Christoffel) 記号の性質を記していく。計量の微分は次のように表すことができる：

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \partial_\alpha (\mathbf{t}_\beta \mathbf{t}_\gamma) = (\partial_\alpha \mathbf{t}_\beta) \cdot \mathbf{t}_\gamma + \mathbf{t}_\beta \cdot (\partial_\alpha \mathbf{t}_\gamma) = \Gamma_{\alpha\beta}^\delta g_{\delta\gamma} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta g_{\delta\beta} \quad (\text{C.17})$$

ここで $(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\beta, \gamma, \alpha)$ に入れ替えに対して

$$\partial_\beta g_{\gamma\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^\delta g_{\delta\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\delta g_{\delta\gamma} \quad (\text{C.18})$$

同様に $(\beta, \gamma, \alpha) \rightarrow (\gamma, \alpha, \beta)$ の入れ替えに対して

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \Gamma_{\gamma\alpha}^\delta g_{\delta\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\delta g_{\delta\alpha} \quad (\text{C.19})$$

以上の3つの式を (C.17) + (C.18) - (C.19) より

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = 2\Gamma_{\alpha\beta}^\delta g_{\delta\gamma} \quad (\text{C.20})$$

となる。両辺に $g^{\delta\gamma}$ をかけると

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\delta = \frac{1}{2} g^{\delta\gamma} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) \quad (\text{C.21})$$

となる。

クリストッフエル記号は計量 $g_{\alpha\beta}$ とその微分だけで書かれる記号で内在的な幾何学量である。

C.5 ガウスの大定理

曲面 (Gauss) の方程式は

$$\partial_\beta \mathbf{t}_\alpha = K_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{n}} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{t}_\gamma \quad (\text{C.22})$$

である。ここで偏微分は交換する性質を利用する。両辺を偏微分すると左辺は

$$\partial_\gamma (\partial_\beta \mathbf{t}_\alpha) = \partial_\beta (\partial_\gamma \mathbf{t}_\alpha) \quad (\text{C.23})$$

となる。同様に左辺は

$$\begin{aligned} \partial_\gamma (K_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{n}}) + \partial_\gamma (\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \mathbf{t}_\mu) &= (\partial_\gamma K_{\alpha\beta}) \hat{\mathbf{n}} + K_{\alpha\beta} (\partial_\gamma \hat{\mathbf{n}}) + (\partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\mu) \mathbf{t}_\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu (\partial_\gamma \mathbf{t}_\mu) \\ &= (\partial_\gamma K_{\alpha\beta}) \hat{\mathbf{n}} - K_{\alpha\beta} K_\gamma^\mu \mathbf{t}_\mu + (\partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\mu) \mathbf{t}_\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu (K_{\mu\gamma} \hat{\mathbf{n}} + \Gamma_{\mu\gamma}^\nu \mathbf{t}_\nu) \\ &= \left(-K_{\alpha\beta} K_\gamma^\mu + \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\nu\gamma}^\mu \right) \mathbf{t}_\mu + \left(\partial_\gamma K_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu K_{\mu\gamma} \right) \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

となる。 β と γ を入れ替えると

$$\partial_\beta (\partial_\gamma \mathbf{t}_\alpha) = \left(-K_{\alpha\gamma} K_\beta^\mu + \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu + \Gamma_{\alpha\gamma}^\nu \Gamma_{\nu\beta}^\mu \right) \mathbf{t}_\mu + \left(\partial_\beta K_{\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu K_{\mu\beta} \right) \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{C.25})$$

となる。式 (C.24), (C.25) の左辺は同じものなので右辺を等式で繋ぐと接線成分は

$$-K_{\alpha\beta} K_\gamma^\mu + \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\nu\gamma}^\mu = -K_{\alpha\gamma} K_\beta^\mu + \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu + \Gamma_{\alpha\gamma}^\nu \Gamma_{\nu\beta}^\mu \quad (\text{C.26})$$

法線成分は

$$\partial_\beta K_{\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu K_{\mu\beta} = \partial_\gamma K_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu K_{\mu\gamma}, \quad (\text{C.27})$$

となる。これを次のように書き直す。接線成分は

$$\partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \Gamma_{\nu\gamma}^\mu - \Gamma_{\alpha\gamma}^\nu \Gamma_{\nu\beta}^\mu = -K_{\alpha\beta} K_\gamma^\mu + K_{\alpha\gamma} K_\beta^\mu \quad (\text{C.28})$$

法線成分は

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu K_{\mu\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu K_{\mu\beta} = \partial_\beta K_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma K_{\alpha\beta} \quad (\text{C.29})$$

となる。接線成分の方程式は Gauss の方程式、法線成分の方程式は Codazzi-Mainardi の方程式と呼ばれている。ここでリーマン曲率テンソル (Riemann curvature tensor) :

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\mu = \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \Gamma_{\nu\gamma}^\mu - \Gamma_{\alpha\gamma}^\nu \Gamma_{\nu\beta}^\mu \quad (\text{C.30})$$

と定義すると $R_{\alpha\beta\gamma}^\mu$ は内在量のみで表すことができる。リーマン曲率テンソルを用いると Gauss の方程式は

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\mu = -K_{\alpha\beta} K_\gamma^\mu + K_{\alpha\gamma} K_\beta^\mu \quad (\text{C.31})$$

と表すことができる。両辺に計量 $g_{\mu\nu}$ をかけると

$$R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}g_{\mu\nu} = -K_{\alpha\beta}(K^{\mu}_{\gamma}g_{\mu\nu}) + K_{\alpha\gamma}(K^{\mu}_{\beta}g_{\mu\nu}) \quad (\text{C.32})$$

$$= -K_{\alpha\beta}K_{\gamma\nu} + K_{\alpha\gamma}K_{\beta\nu} \quad (\text{C.33})$$

となる。右辺の値が唯一ゼロにならないのは $(\alpha, \beta, \gamma, \nu) = (1, 2, 1, 2)$ のときとこれを入れ替えた組み合わせの時のみである。その時の右辺は

$$K_{11}K_{22} - K_{12}K_{12} = \det(K_{\alpha\beta}) \quad (\text{C.34})$$

となる。ここで $\det(K_{\alpha\beta}) = K_G$, $K_{\alpha\beta} = K^{\gamma}_{\alpha}g_{\gamma\beta}$ などを利用すると

$$R^{\mu}_{121}g_{\mu 2} = \det(K_{\alpha\beta}) = \det(K^{\gamma}_{\alpha}g_{\gamma\beta}) = \det(K^{\gamma}_{\alpha})\det(g_{\gamma\beta}) = K_G \cdot \det(g) \quad (\text{C.35})$$

となる。これよりガウス曲率 K_G は

$$K_G = \frac{R^1_{121}g_{12}R^2_{121}g_{22}}{\det(g)} \quad (\text{C.36})$$

となる。右辺はリーマン曲率テンソルと計量テンソルの内在量だけで表されている。よって曲面がどの程度曲がっているかというガウス曲率は内在量だけで求めることができる。これはガウスの大定理 (驚愕定理, Gauss theorem Egregium) と呼ばれている。

付録 D

Abaqus の使い方

円筒シェルをピンチする計算を行うための Abaqus の使い方を記述していく。同じ計算も複数のモデリングの方法があると思うが一番簡単と思うやり方を紹介する。より詳しいことは Abaqus のオンラインマニュアルを読むとわかる。

D.1 Abaqus の基礎方程式

Abaqus の数値計算においては、付録 A で説明したキルヒホッフの理論を拡張したものを採用している。キルヒホッフの板の理論の、厚み方向への変形をより適切に評価したモデルである Mindlin-Reissner の板の理論が適用されている [81]。より具体的には、キルヒホッフの理論で板の剛体回転の角度を高さの関数として表していたのに対して、Mindlin の理論では角度を独立変数として扱う。この操作により、高さ方向のせん断変形をより適切に扱うことが可能になる。

実際の計算時には、まず指定された境界条件を満たすように、指定された点の変位や回転、力やモーメントを変化させる。力とモーメントの釣り合いの式から、境界条件を満たすように方程式を解く。より詳細な計算方法は Abaqus のマニュアル 3.6 章の Shell elements に記述されている。

D.2 Abaqus の起動

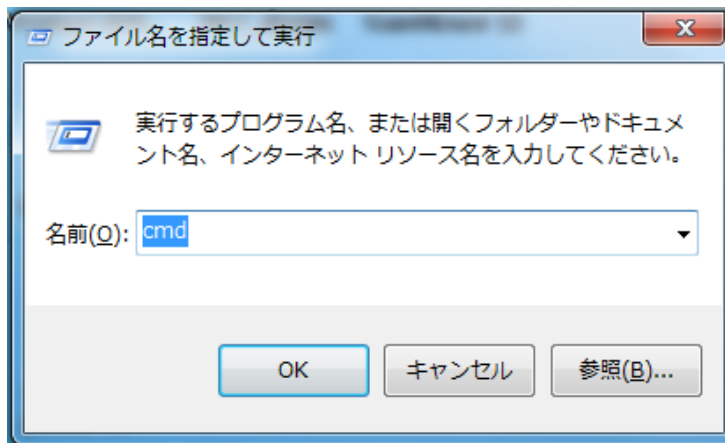
コマンドプロンプトかターミナルエミュレータにコマンド

```
> abaqus cae
```

で起動できる。コマンドプロンプトはウィンドウズキー +R を押してファイル名を指定して実行画面を出して

```
cmd
```

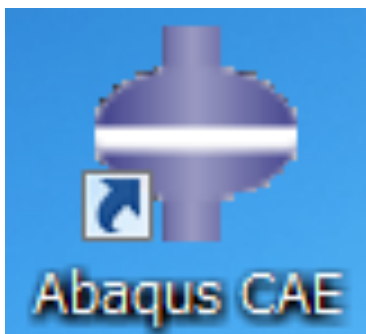
と打ち込むと起動する。



もしくはデスクトップにある

Abaqus CAE

とかかれたショートカットキーをおすと起動する。



起動するとそのディレクトリに abaqus.rpy やそれに番号がついた名前の作業ファイルが作成される。デフォルトでは起動したディレクトリに作成したファイルが保存されるので、作業ディレクトリを作ってから作業するといひ。

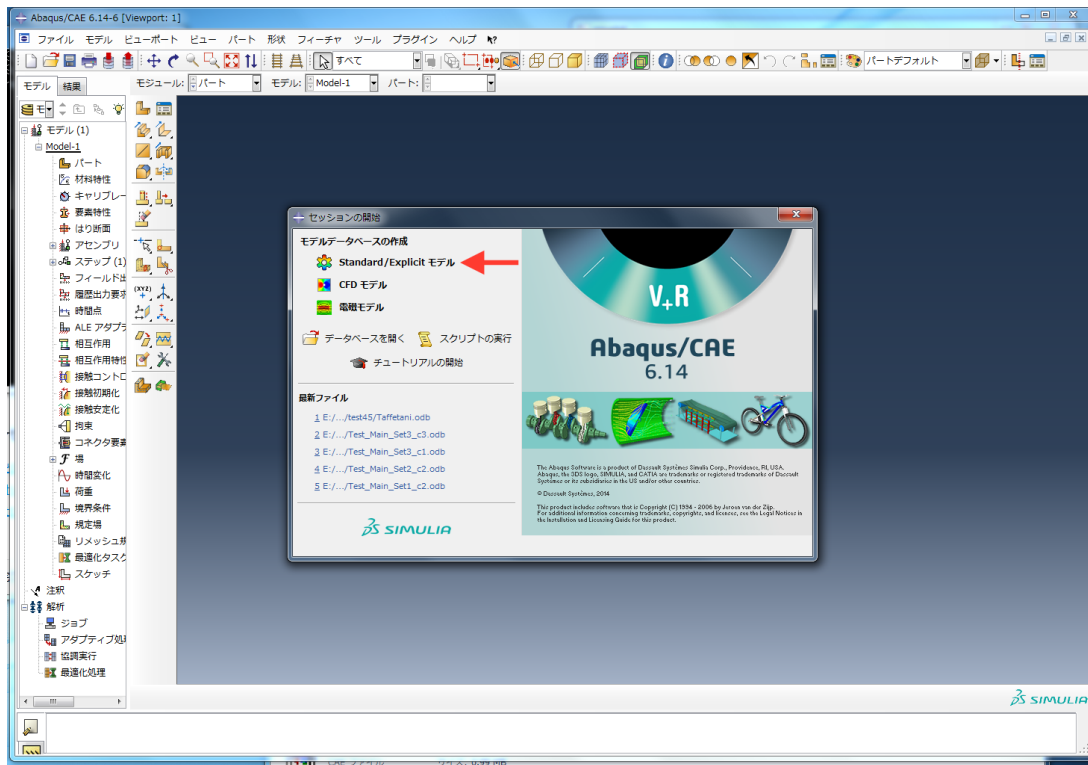
D.3 モデルの作成

Abaqus CAE を起動すると次のような画面が表示される。

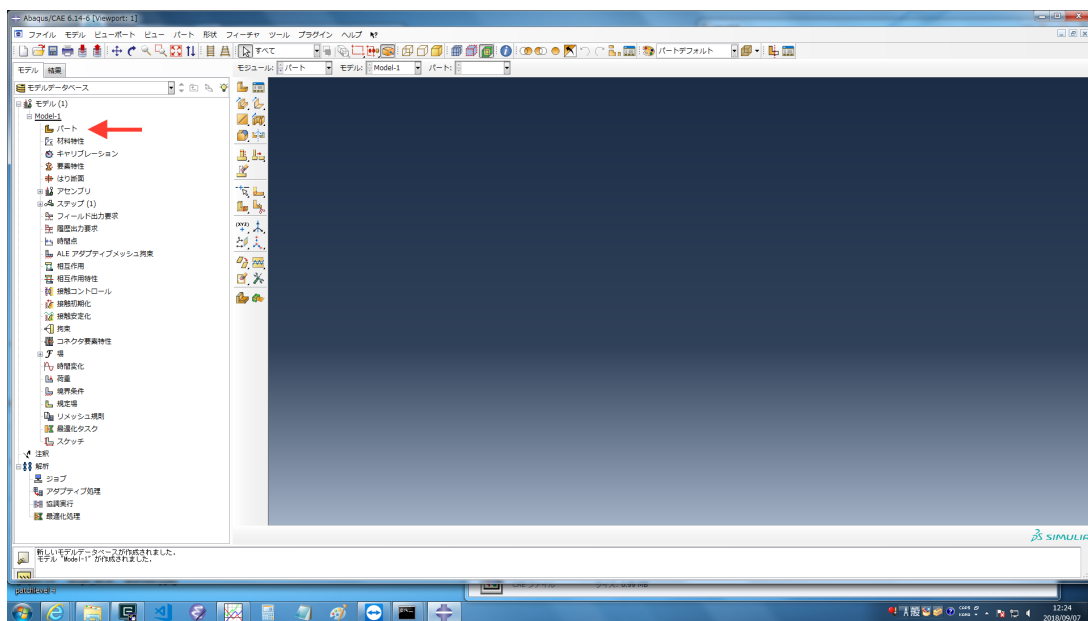
弾性体の問題を扱うので

Standard/Explicit モデル

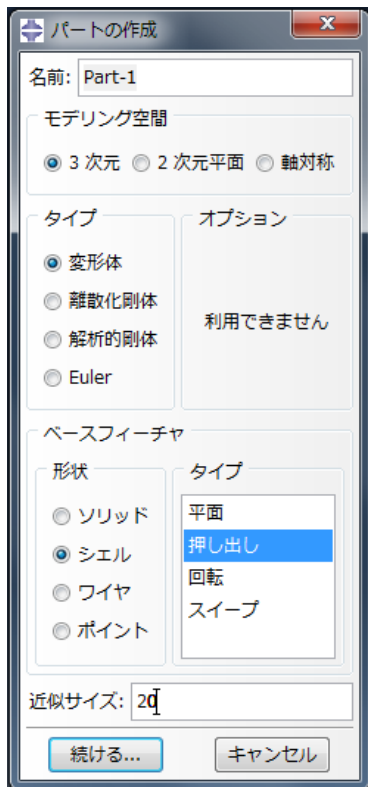
を選択する。



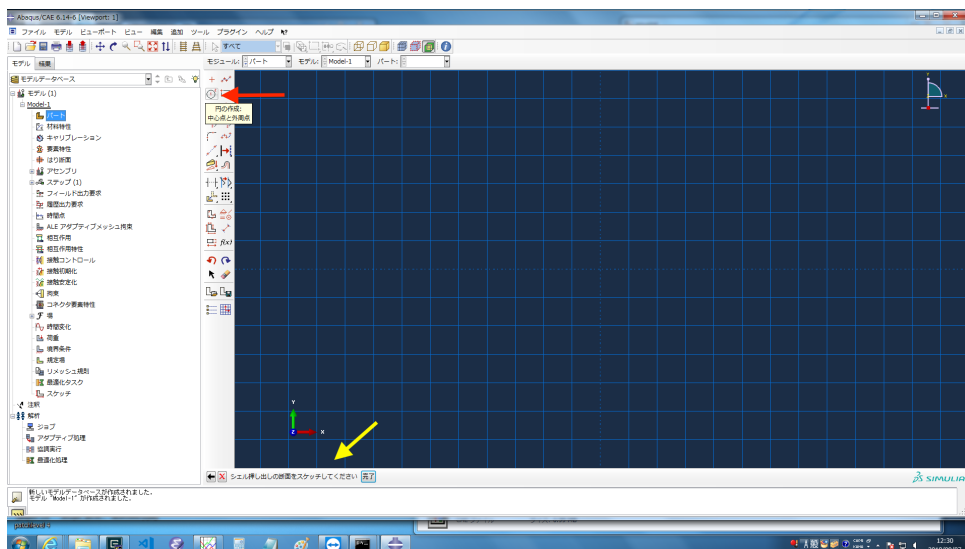
すると次のような画面になる。



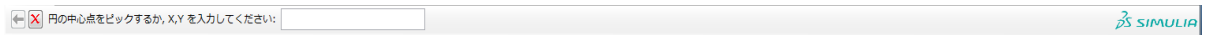
左の方のパートをダブルクリックする。



3次元、変形体、シェル、押し出しを選択して続けるを押す。今回は断面を円で作りそれを押し出す方法で円筒を作成する近似サイズは作りたいモデルの断面の大きさぐらいにするとマウスでの操作が簡単になるが、数値で指定する場合は関係ない。次にこのような画面が表示される。



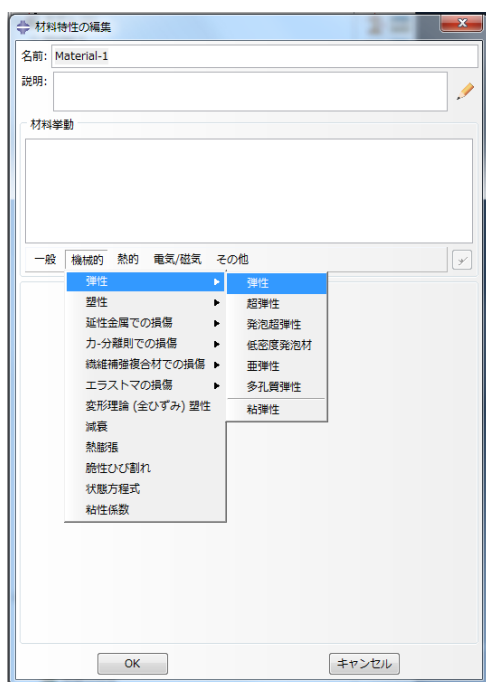
今回は円筒を作成したいので図にある、円の作成をクリックする。すると画面の下の方に



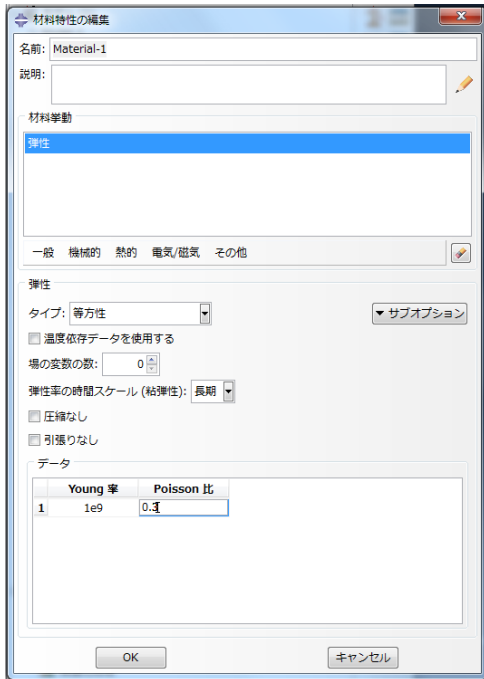
画像のように表示されるので、マウスでクリックして原点を選択するか、 X, Y に値を入力する。デフォルトでは $(X, Y) = (0, 0)$ になっているので、今回はそのまま Enter を押す。次に と表示されるので、同様にする。半径 1 の円が作りたければ 1,0 と入力して Enter



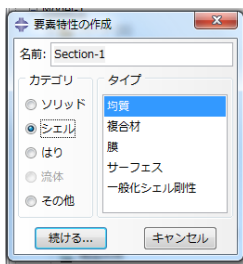
を押せばよい。その後、作業のキャンセルをする。画面上で右クリックして作業のキャンセルを押すか、バツボタンを押す。そして完了ボタンを押す。完了ボタンを押すと奥行きを指定する画面が出るので、作りたい長さを指定する。OK を押す。次に材料特性をダブルクリックする。



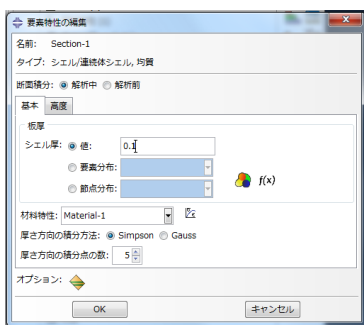
上の画面が表示されるので弾性体の場合は、機械的の弾性タブの中の弾性を選ぶ。



すると上の画面が表示されるので、等方弾性体の場合はそのままヤング率とポアソン比を入力する。

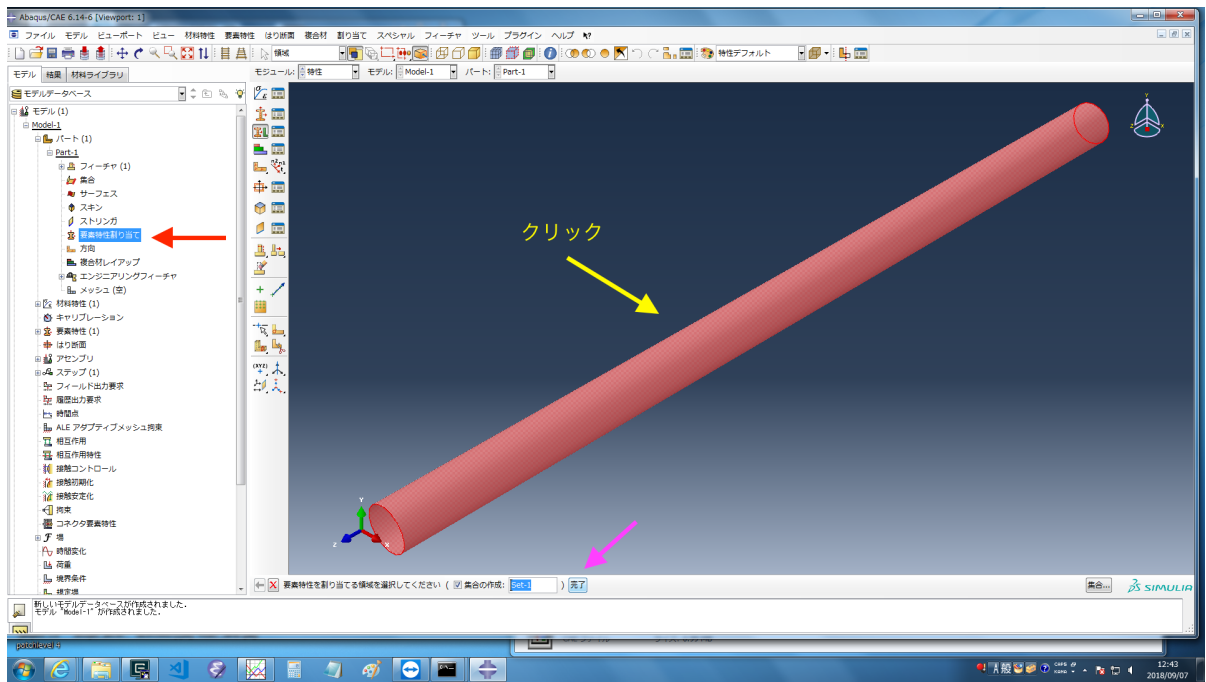


次に要素特性をダブルクリックする。上の画面が表示されるので自分の作りたいものを選ぶ。

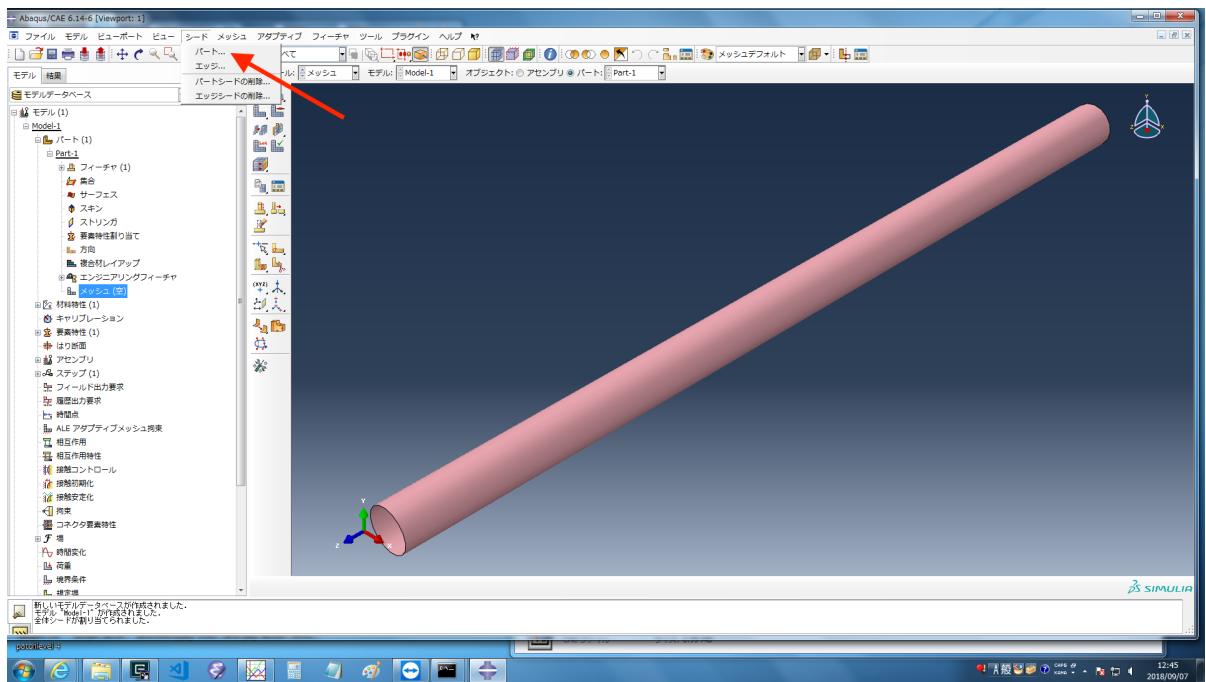


今回はシェルの均質を選ぶ。すると上の画面が表示されるのでシェル厚を入力して OK を押す。厚さ方向のメッシュや積分方法などは変更可能である。

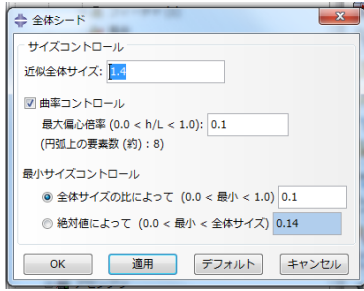
次にパートタブを開いて作成したパート名 (デフォルトでは Part-1) のタブを開いて要素特性の割り当てをダブルクリックする。



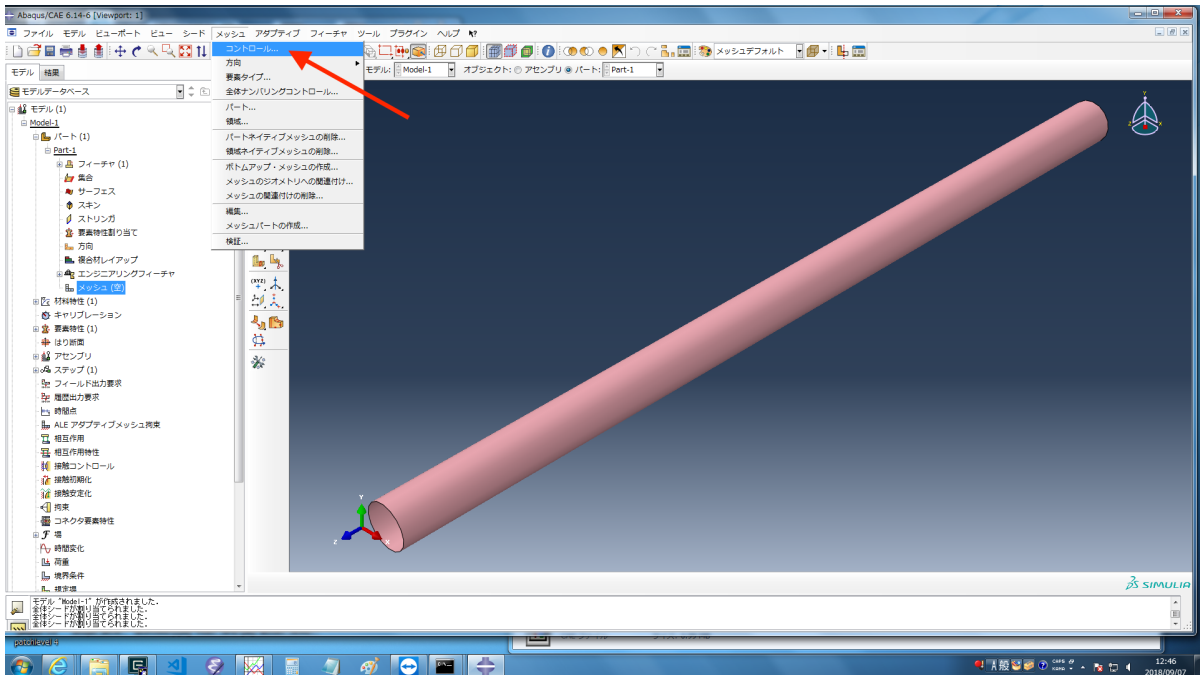
次にメッシュを切る。



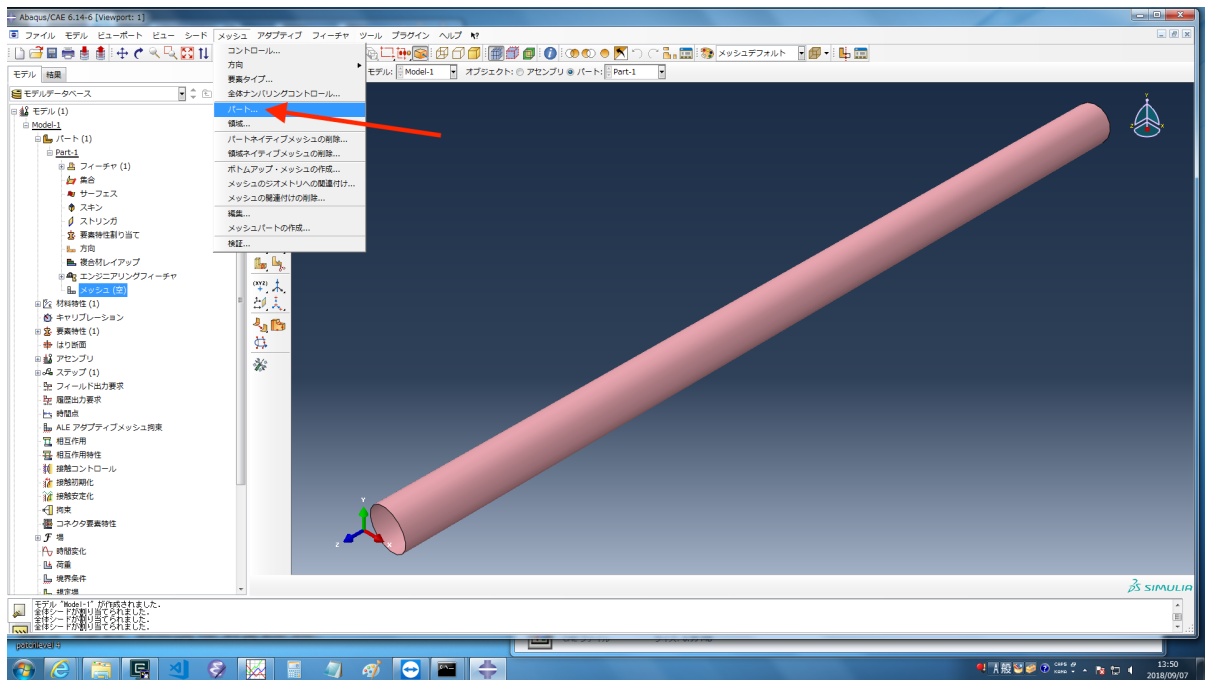
図のようにパートタブの中のメッシュをダブルクリックする。メッシュのシード、パートをクリックする。次の画面がでるので適切なシード値を入れる。



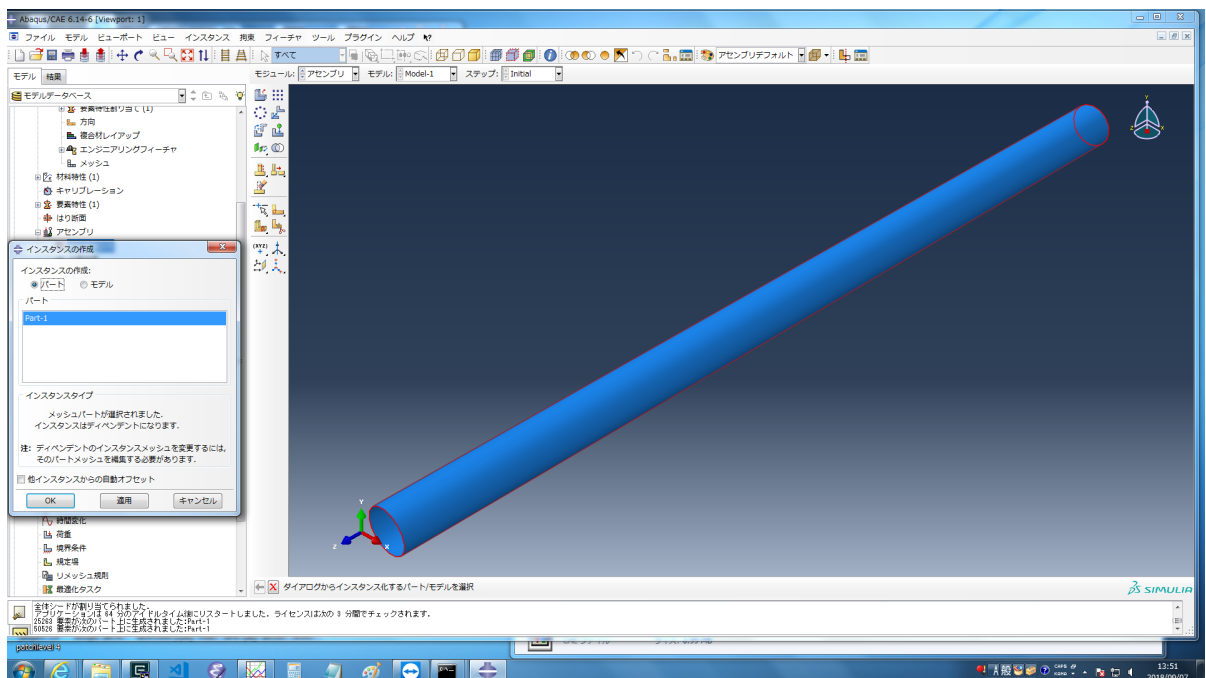
適用をクリックすると画面に境界のノードが表示されるので調節する。次にメッシュのコントロールを選択する。三角形や四辺形などのメッシュの形状などを選ぶ。最後にメッシュ



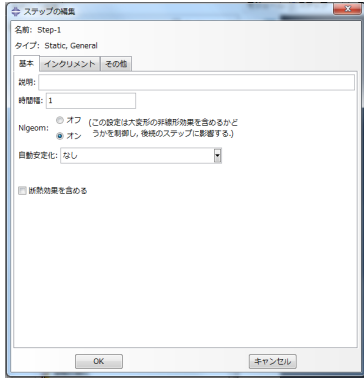
のパートを選び、分割するを選択する。するとパートをメッシュ分割しますか?と表示されるのはいを選択する。



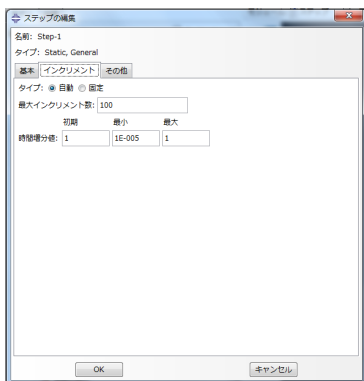
次にアセンブリタブを開いてインスタンスを押す。ここでは作ったパートをどのように配置するかを決めることができる。パートが複数ある場合は相対的な位置関係を決めるために動かす必要がある。今回のようにパート1つだけの場合は選ぶだけで特にすることはない。原点をずらしたい場合や、軸を回転させたい時は操作するが今回は説明しない。図のような画面が表示されるのでOKを選ぶ。



次にステップタブをダブルクリックする。するとステップの名前と、ステップ同士の前後関係と、ステップのタイプを選ぶ項目が出てくる。これは荷重のかけ方や境界条件の与え方が段階的に与える場合は複数のステップを作る必要がある。今回はピンチするだけなので1つしか作らない。複数作る場合も基本的には同じように作れば良い。static,General を選択し続けるを押す。

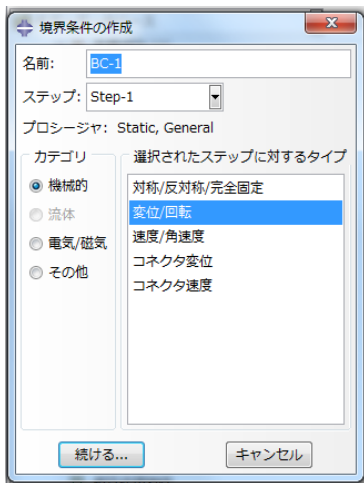


すると上のような画面が表示される。幾何学非線形性 (微小ひずみの近似) を採用する場合は、Nlgeom をオンにする。自動安定化のオプションは、計算の結果を見ながら取り入れると、ほぼ同じ精度の計算結果をより早い時間で計算することができる。与え方によっては結果が大きく変わる場合もあるので、しっかりと確認することが重要。

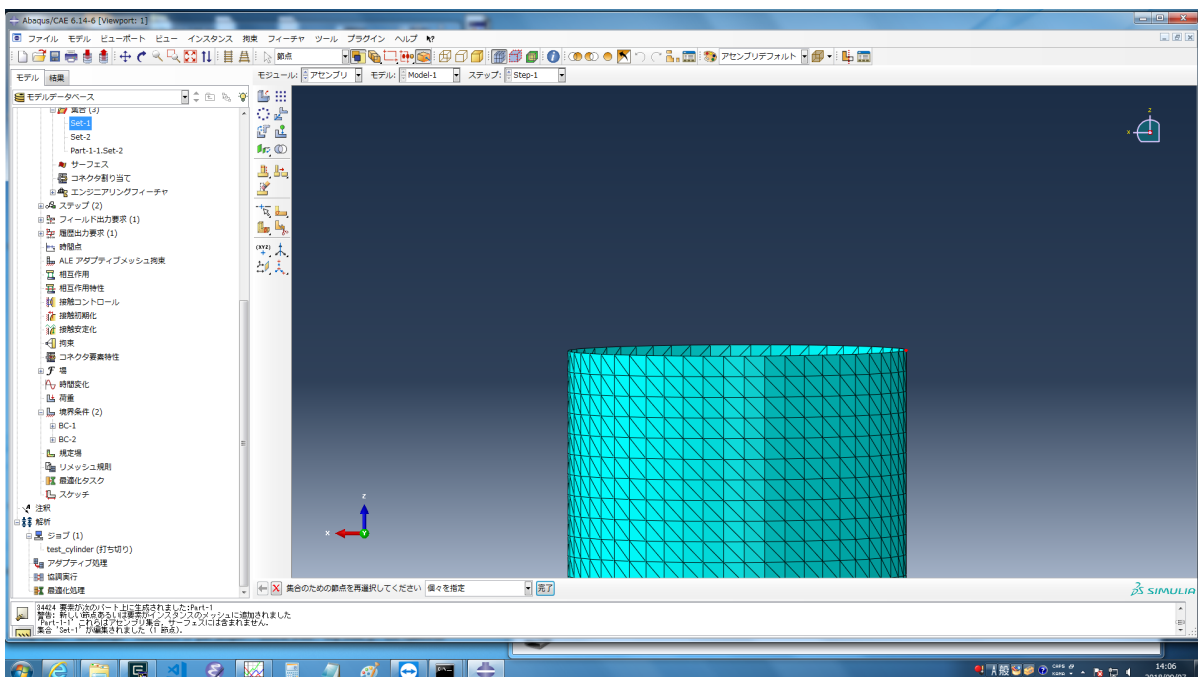


次にインクリメントタブを開くと上のような画面になる。時間増分値が初期や最大を変えらることで、最終状態までの途中の状態をより細かく見ることができる。また計算がうまく回らない時などはここを細かくすると、1ステップあたりの変化させる量を減らすことができるので、計算が可能になる場合もある。

次に境界条件を設定する。境界条件タブをダブルクリックすると次のような画面がでる。今回はピンチしたいので円筒の端に変位を与える。「機械的」の変位回転を選択して続けるを押す。するとどの点を変形させるかを選ぶ画面になるので、ジオメトリで円筒の端を選

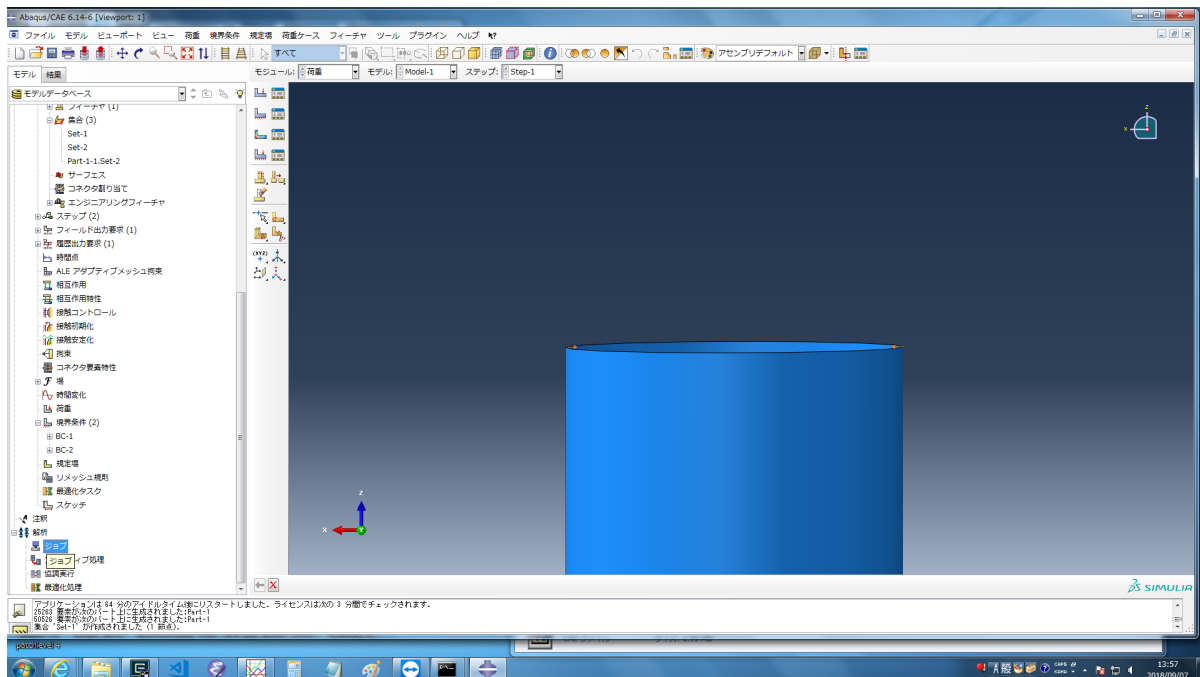


び、 x 軸方向に変位を与える。そこから円筒軸に対して 180 度回ったところを符号が逆の変位を与えればピンチをしたことになる。その点はジオメトリからは選ぶことができないので、節点から反対側を下の図のように選ぶ。これでピンチするための境界条件の設定はできた。



D.4 計算の実行

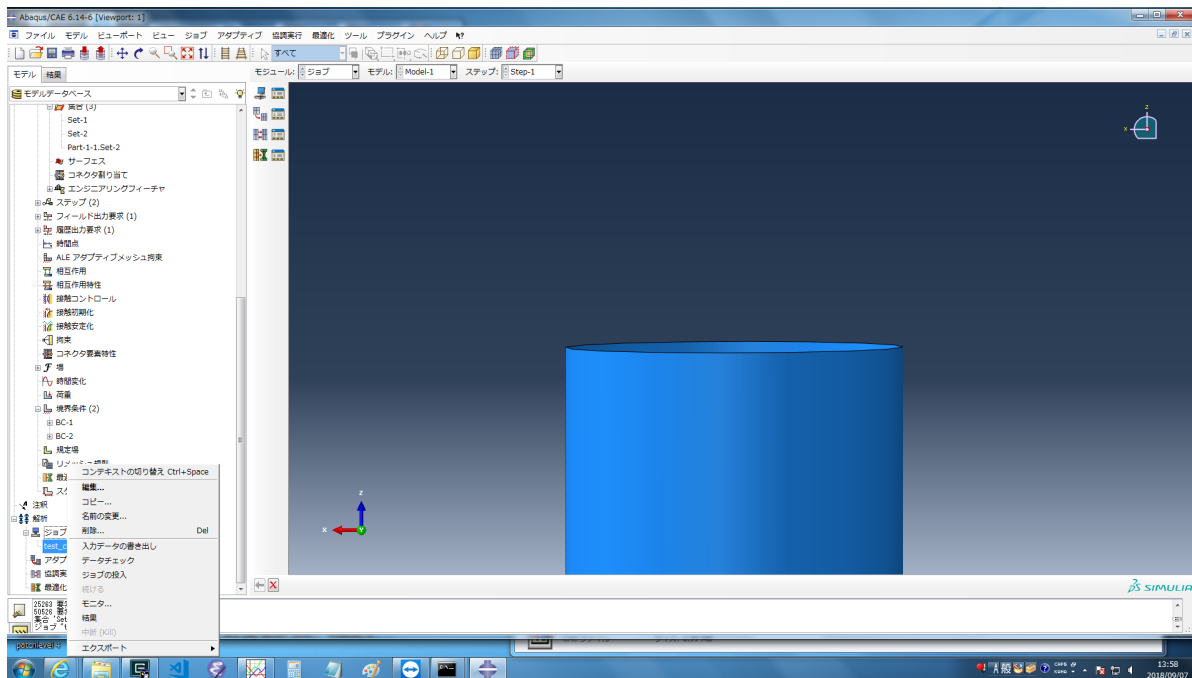
ジョブタブをダブルクリックして新しいジョブを作成する。ジョブの名前は自分の都合の



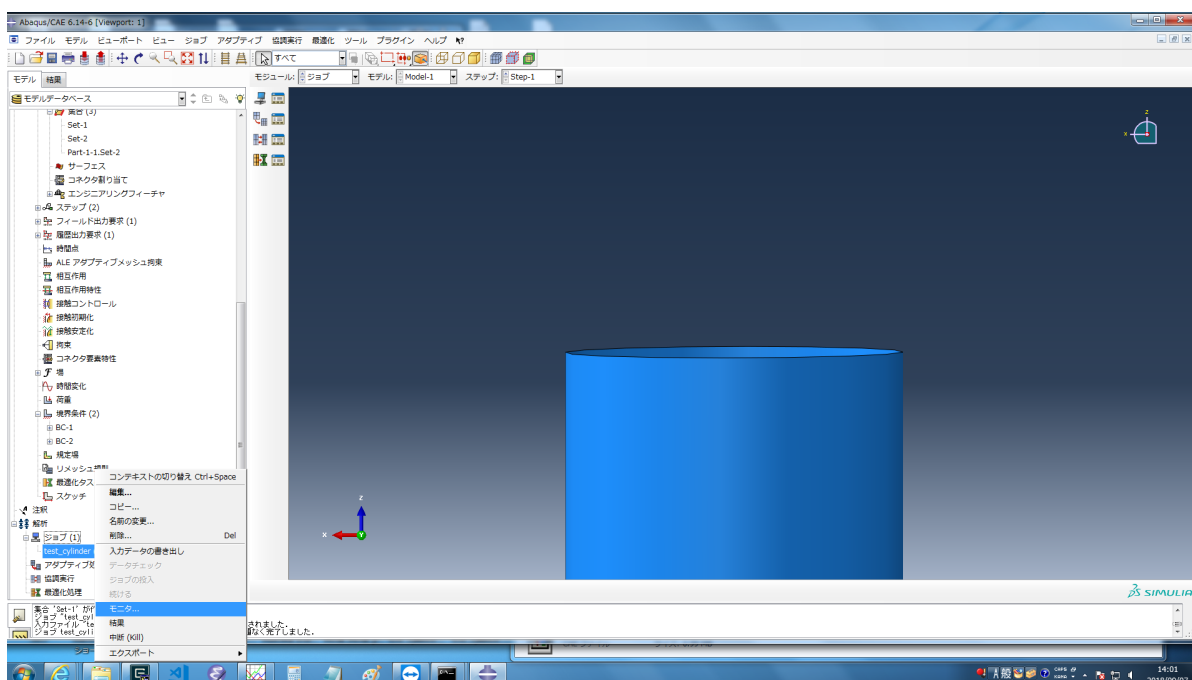
いい名前にする。この名前で様々な拡張子のファイルが10個近く作成される。ジョブが作成できれば、あとは計算を回せばよい。作成したジョブ名を右クリックしてジョブの投入を



クリックすると計算が実行される。



計算がどの程度進んでいるかを確認することができる。ジョブを回した後に、ジョブ名を右クリックしてモニターを押すとジョブの進行具合が表示される。あまりにもメッシュが細か



すぎたり、無理な変形を与えると時間がかかりすぎるので、最初はここで確認してどの程度でジョブが終わるかを確認しよう。ステップのインクリメントタブで時間の増加タイプを自動にしていると、計算が収束しなかった時に自動でステップを最初の設定よりもさらに細かく分割して計算し直すという機能がある。このおかげで時間ステップを気にしなくても計算は回るが、膨大な時間がかかってしまう時がある。これを防ぐために最大インクリメント数を適切に設定しておけば、あまりにも時間ステップ進まない場合は計算が中断できる。ここ

をかなり大きくすれば計算できるものもあるが、データサイズが大きくなりすぎる可能性もあるので注意する。

参考文献

- [1] Basile Audoly and Yves Pomeau. *Elasticity and geometry: from hair curls to the non-linear response of shells*. Oxford University Press, 2010.
- [2] C. R. Calladine. *Theory of Shell Structure*. Cambridge University Press, 1983.
- [3] Eduard Ventsel and Theodor Krauthammer. *Thin plates and shells: theory: analysis, and applications*. CRC press, 2001.
- [4] Yasuaki Morigaki, Hirofumi Wada, and Yoshimi Tanaka. Stretching an elastic loop: Crease, helicoid, and pop out. *Physical review letters*, 117(19):198003, 2016.
- [5] Tomohiko G Sano and Hirofumi Wada. Snap-buckling in asymmetrically constrained elastic strips. *Physical Review E*, 97(1):013002, 2018.
- [6] Charles Darwin. On the movements and habits of climbing plants. *Journal of the Linnean Society of London, Botany*, 9(33-34):1–118, 1865.
- [7] Tyler McMillen, Alain Goriely, et al. Tendril perversion in intrinsically curved rods. *Journal of Nonlinear Science*, 12(3):241–281, 2002.
- [8] M Marder, E Sharon, S Smith, and Benoit Roman. Theory of edges of leaves. *EPL (Europhysics Letters)*, 62(4):498, 2003.
- [9] Katherine A McCulloh, John S Sperry, and Frederick R Adler. Water transport in plants obeys murray’s law. *Nature*, 421(6926):939, 2003.
- [10] H Meinhardt. Morphogenesis of lines and nets. *Differentiation*, 6(2):117–123, 1976.
- [11] Alan Mathison Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Bulletin of mathematical biology*, 52(1-2):153–197, 1990.
- [12] Yoshihisa Oda and Hiroo Fukuda. Initiation of cell wall pattern by a rho-and microtubule-driven symmetry breaking. *Science*, 337(6100):1333–1336, 2012.
- [13] Aurelien Bancaud, Christophe Lavelle, Sebastien Huet, and Jan Ellenberg. A fractal model for nuclear organization: current evidence and biological implications. *Nucleic acids research*, 40(18):8783–8792, 2012.
- [14] Michael W Palmer. Fractal geometry: a tool for describing spatial patterns of plant communities. *Vegetatio*, 75(1-2):91–102, 1988.
- [15] Bharat Bhushan. *Biomimetics: lessons from nature—an overview*, 2009.

- [16] Huajian Gao, Xiang Wang, Haimin Yao, Stanislav Gorb, and Eduard Arzt. Mechanics of hierarchical adhesion structures of geckos. *Mechanics of Materials*, 37(2-3):275–285, 2005.
- [17] DW Bechert, M Bruse, W vd Hage, JG Th Van der Hoeven, and G Hoppe. Experiments on drag-reducing surfaces and their optimization with an adjustable geometry. *Journal of fluid mechanics*, 338:59–87, 1997.
- [18] Michael Nosonovsky and Bharat Bhushan. *Multiscale dissipative mechanisms and hierarchical surfaces: friction, superhydrophobicity, and biomimetics*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [19] Wilhelm Barthlott and Christoph Neinhuis. Purity of the sacred lotus, or escape from contamination in biological surfaces. *Planta*, 202(1):1–8, 1997.
- [20] GL Hebel, JD Frost, and AT Myers. Quantifying hook and loop interaction in textured geomembrane–geotextile systems. *Geotextiles and Geomembranes*, 23(1):77–105, 2005.
- [21] David Lentink, William B Dickson, Johan L Van Leeuwen, and Michael H Dickinson. Leading-edge vortices elevate lift of autorotating plant seeds. *Science*, 324(5933):1438–1440, 2009.
- [22] Darcy Wentworth Thompson et al. On growth and form. *On growth and form.*, 1942.
- [23] Yoël Forterre, Jan M Skotheim, Jacques Dumais, and Lakshminarayanan Mahadevan. How the venus flytrap snaps. *Nature*, 433(7024):421, 2005.
- [24] Charles Darwin and Francis Darwin. *Insectivorous plants*. J. Murray, 1888.
- [25] Laurence Gaume and Yoel Forterre. A viscoelastic deadly fluid in carnivorous pitcher plants. *PloS one*, 2(11):e1185, 2007.
- [26] Olivier Vincent, Carmen Weißkopf, Simon Poppinga, Tom Masselter, Thomas Speck, Marc Joyeux, Catherine Quilliet, and Philippe Marmottant. Ultra-fast underwater suction traps. *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences*, 278(1720):2909–2914, 2011.
- [27] PH Sydenham and GP Findlay. The rapid movement of the bladder of utricularia sp. *Australian Journal of Biological Sciences*, 26(5):1115–1126, 1973.
- [28] Tony Farquhar and Yong Zhao. Fracture mechanics and its relevance to botanical structures. *American journal of botany*, 93(10):1449–1454, 2006.
- [29] E. Katifori, S. Alben, E. Cerda, D. R. Nelson, and J. Dumais. Foldable structures and the natural design of pollen grains. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 107:7635–7639, 2010.
- [30] Roger Philip Wodehouse. *Pollen grains*. Mcgraw-Hill Book Company, Inc; New

- York; London, 1935.
- [31] James Edward Gordon. *Structures: or why things don't fall down*. Da Capo Press, 2009.
 - [32] Olivier Hamant, Marcus G Heisler, Henrik Jönsson, Pawel Krupinski, Magalie Uytewaal, Plamen Bokov, Francis Corson, Patrik Sahlin, Arezki Boudaoud, Elliot M Meyerowitz, et al. Developmental patterning by mechanical signals in arabidopsis. *science*, 322(5908):1650–1655, 2008.
 - [33] Keigo Nakamura, Tetsuya Hisanaga, Koichi Fujimoto, Keiji Nakajima, and Hirofumi Wada. Plant-inspired pipettes. *Journal of The Royal Society Interface*, 15(140):20170868, 2018.
 - [34] Stephen Timoshenko. *History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures*. Courier Corporation, 1983.
 - [35] Alexander E Lobkovsky and TA Witten. Properties of ridges in elastic membranes. *Phys. Rev. E*, 55(2):1577, 1997.
 - [36] TA Witten. Stress focusing in elastic sheets. *Reviews of Modern Physics*, 79(2):643, 2007.
 - [37] E Cerda and L Mahadevan. Conical surfaces and crescent singularities in crumpled sheets. *Phys. Rev. Lett.*, 80(11):2358, 1998.
 - [38] M Ben Amar and Y Pomeau. Crumpled paper. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 453:729–755, 1997.
 - [39] Alexander E Lobkovsky. Boundary layer analysis of the ridge singularity in a thin plate. *Physical Review E*, 53(4):3750, 1996.
 - [40] E. Reissner. Stresses and small displacements of shallow spherical shells ii. *J. Math. Phys.*, 25:279–299, 1947.
 - [41] J. W. Hutchinson and W. T. Koiter. Postbuckling theory. *App. Mech. Rev.*, 23:1353–1366, 1970.
 - [42] A. Vaziri and L. Mahadevan. Localized and extended deformations of elastic shells. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 105:7913–7918, 2008.
 - [43] Enrique Cerda, Lakshminarayanan Mahadevan, and José Miguel Pasini. The elements of draping. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 101(7):1806–1810, 2004.
 - [44] E Bayart, A Boudaoud, and M Adda-Bedia. Finite-distance singularities in the tearing of thin sheets. *Physical review letters*, 106(19):194301, 2011.
 - [45] Hugues Vandeparre, Miguel Piñeirua, Fabian Brau, Benoit Roman, José Bico, Cyrien Gay, Wenzhong Bao, Chun Ning Lau, Pedro M Reis, and Pascal Damman. Wrinkling hierarchy in constrained thin sheets from suspended graphene to cur-

- tains. *Physical Review Letters*, 106(22):224301, 2011.
- [46] Robert D Schroll, Eleni Katifori, and Benny Davidovitch. Elastic building blocks for confined sheets. *Phys. Rev. Lett.*, 106(7):074301, 2011.
- [47] Moumita Das, Ashkan Vaziri, Arshad Kudrolli, and L Mahadevan. Curvature condensation and bifurcation in an elastic shell. *Phys. Rev. Lett.*, 98(1):014301, 2007.
- [48] Thomas Barois, Loïc Tadrict, Catherine Quilliet, and Yoël Forterre. How a curved elastic strip opens. *Phys. Rev. Lett.*, 113(21):214301, 2014.
- [49] M. Pezulla, N. Stoop, M. P. Steranka, A. J. Bade, and D. P. Holms. Curvature-induced instabilities of shells. *Phys. Rev. Lett.*, 120:048002, 2018.
- [50] Lord Rayleigh. On the bending and vibration of thin elastic shells, especially of cylindrical form. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 45(273-279):105–123, 1888.
- [51] J. W. Hutchinson. Buckling of spherical shells revisited. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 472:20160577, 2006.
- [52] D. Vella, A. Adjari, A. Vaziri, and A. Boudaoud. Indentation of ellipsoidal and cylindrical elastic shells. *Phys. Rev. Lett.*, 109:144302, 2012.
- [53] A. Lazarus, H. C. B. Florijn, and P. M. Reis. Geometry-induced rigidity in non-spherical pressurized elastic shells. *Phys. Rev. Lett.*, 109:144301, 2012.
- [54] LG Brazier. On the flexure of thin cylindrical shells and other” thin” sections. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 116(773):104–114, 1927.
- [55] Ashkan Vaziri. Mechanics of highly deformed elastic shells. *Thin-Walled Structures*, 47(6-7):692–700, 2009.
- [56] Arezki Boudaoud, Pedro Patrício, Yves Couder, and Martine Ben Amar. Dynamics of singularities in a constrained elastic plate. *Nature*, 407(6805):718, 2000.
- [57] AC Callan-Jones, P-T Brun, and B Audoly. Self-similar curling of a naturally curved elastica. *Physical review letters*, 108(17):174302, 2012.
- [58] B. Moulia, M. Fournier, and D. Guitard. Mechanics and form of the maize leaf: in vivo quantification of flexural behaviour. *J. Mater. Sci.*, 29:2359–2366, 1994.
- [59] Kazuya Saito, Shuhei Nomura, Shuhei Yamamoto, Ryuma Niyama, and Yoji Okabe. Investigation of hindwing folding in ladybird beetles by artificial elytron transplantation and microcomputed tomography. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, pages 5624–5628, 2017.
- [60] Lincoln Taiz and Eduardo Zeiger. *Plant Physiology, Sinauer Associates*. Sinauer Associates, 2002.
- [61] Motohiro Sato, Akio Inoue, and Hiroyuki Shima. Bamboo-inspired optimal design for functionally graded hollow cylinders. *PloS one*, 12(5):e0175029, 2017.

- [62] François Guinot, Stéphane Bourgeois, Bruno Cochelin, and Laurent Blanchard. A planar rod model with flexible thin-walled cross-sections. application to the folding of tape springs. *International Journal of Solids and Structures*, 49(1):73–86, 2012.
- [63] Octavio Albarrán Arriagada, Gladys Massiera, and Manouk Abkarian. Curling and rolling dynamics of naturally curved ribbons. *Soft matter*, 10(17):3055–3065, 2014.
- [64] Daichi Matsumoto, Tomohiko G Sano, and Hirofumi Wada. Pinching an open cylindrical shell: Extended deformation and its persistence. *EPL (Europhysics Letters)*, 123(1):14001, 2018.
- [65] Viktória Hunyadi, Denis Chrétien, Henrik Flyvbjerg, and Imre M Jánosi. Why is the microtubule lattice helical? *Biology of the Cell*, 99(2):117–128, 2007.
- [66] M. J. King, J. F. V. Vincent, and W. Harris. Curling and folding of leaves of monocotyledons — a strategy for structural stiffness. *New Zealand J. Bot.*, 34:411–416, 1996.
- [67] KA Seffen and S Pellegrino. Deployment dynamics of tape springs. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 455(1983):1003–1048, 1999.
- [68] L. Mahadevan, J. Bico, and G. McKinley. Popliteal rippling of layered elastic tubes and scrolls. *Europhys. Lett.*, 65:323–329, 2004.
- [69] Pedro J de Pablo, Iwan AT Schaap, Frederick C MacKintosh, and Christoph F Schmidt. Deformation and collapse of microtubules on the nanometer scale. *Phys. Rev. Lett.*, 91(9):098101, 2003.
- [70] Andrew C Palmer and JH Martin. Buckle propagation in submarine pipelines. *Nature*, 254(5495):46, 1975.
- [71] L Mahadevan, A Vaziri, and Moumita Das. Persistence of a pinch in a pipe. *EPL (Europhysics Letters)*, 77(4):40003, 2007.
- [72] Myoung-Gyu Lee, Daeyong Kim, Chongmin Kim, Michael L Wenner, and Kwansoo Chung. Spring-back evaluation of automotive sheets based on isotropic–kinematic hardening laws and non-quadratic anisotropic yield functions, part iii: applications. *International journal of plasticity*, 21(5):915–953, 2005.
- [73] Loic Tadrist and Baptiste Darbois-TeXier. Are leaves optimally designed for self-support? an investigation on giant monocots. *Journal of theoretical biology*, 396:125–131, 2016.
- [74] B Mouliá and M Fournier. Mechanics of the maize leaf: a composite beam model of the midrib. *Journal of Materials Science*, 32(10):2771–2780, 1997.
- [75] Darshil U Shah, Thomas PS Reynolds, and Michael H Ramage. The strength of plants: theory and experimental methods to measure the mechanical properties of stems. *Journal of experimental botany*, 68(16):4497–4516, 2017.

- [76] Simon Schwendener. *Mechanische Theorie der Blattstellungen*. W. Engelmann, 1878.
- [77] C. D. Santangelo. Nambu-goldstone modes and diffuse deformations in elastic shells. *Soft Matter*, 9:8246, 2013.
- [78] Bing Wang, Keith A Seffen, and Simon D Guest. Folding of a bistable tape-spring structure based on plain-woven composite. In *Proceedings of the 26th Annual Conference of Composites/Nano Engineering (ICCE-26)*. 2018.
- [79] SD Guest and S Pellegrino. Analytical models for bistable cylindrical shells. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 462, pages 839–854. The Royal Society, 2006.
- [80] 梅原雅顕 and 山田光太郎. **曲線と曲面 (改訂版):—微分幾何的アプローチ—**. 裳華房, 2015.
- [81] Ted Belytschko, Bak Leong Wong, and Huai-Yang Chiang. Advances in one-point quadrature shell elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 96(1):93–107, 1992.