

# Abstract of Doctoral Thesis

## **Title: Asymptotic distribution of eigenvalues of the Zakharov-Shabat operators in the semiclassical limit**

Doctoral Program in Advanced Mathematics and Physics  
Graduate School of Science and Engineering  
Ritsumeikan University

ヒロタ コウキ  
HIROTA Koki

The Zakharov-Shabat operator is a kind of the one-dimensional Dirac operator and appears as one of the Lax pair for the defocusing or focusing nonlinear Schrödinger equation. This operator is self-adjoint in the defocusing case and non-self-adjoint in the focusing case provided the potential is real-valued, and the eigenvalues play an important part to construct the exact solution to the nonlinear Schrödinger equation. In this doctoral thesis, we present the results related to the distribution of eigenvalues of the Zakharov-Shabat operator in the semiclassical limit.

In Chapter 1, we explain the background and outline of our study. In Chapter 2, we introduce the exact WKB method to systems of two linear first order differential equations, which is the main tool of our study. We also review the property of the solutions, and construct the exact WKB solutions to the Zakharov-Shabat eigenvalue problems.

In Chapter 3, we consider the self-adjoint Zakharov-Shabat operator. Real eigenvalues exist when the square of the potential has a simple well. We derive the distribution for the eigenvalues by reducing to the connection problem of the solutions near the singular point. In particular, there are two types of representation for the distribution of eigenvalues because of the difference of singularity for the solutions depending on the form of potentials. Moreover we show that the eigenvalues stay real for a sufficiently small non-self-adjoint perturbation when the potential has some PT-like symmetry.

In Chapter 4, we consider the distribution of eigenvalues of the non-self-adjoint Zakharov-Shabat operator with a simple well type potential and a double well type potential. In the simple well case, we show that all of the eigenvalues are purely imaginary for sufficiently small semiclassical parameter. In the symmetric double well case, we observe the eigenvalue splitting with an exponential estimate.

## 博士論文要旨

### 論文題名：Zakharov-Shabat 作用素の固有値の準古典極限における漸近分布

立命館大学大学院理工学研究科  
基礎理工学専攻博士課程後期課程

ヒロタ コウキ  
広田 高輝

Zakharov-Shabat 作用素とは、一次元ディラック作用素の一種であり、defocusing、および focusing な非線形シュレディンガー方程式のラックス対のひとつとして与えられる作用素である。特に、defocusing な場合に対しては、ポテンシャルが実数値ならば自己共役、focusing な場合に対しては非自己共役な作用素となることが知られており、その固有値は、ソリトン解の構成において重要な役割を担っている。本論文は、準古典極限における Zakharov-Shabat 作用素の固有値の漸近分布について、その結果を述べたものである。

第1章では、本研究の背景と概要を説明し、第2章では、本研究で扱う手法である、二元連立一階常微分方程式に対する完全 WKB 法について述べる。また、完全 WKB 解が持つ性質に関する既存の結果について紹介し、さらに、Zakharov-Shabat 固有値問題に対して完全 WKB 解を構成する。

第3章では、自己共役な Zakharov-Shabat 作用素の固有値問題について考える。この作用素は、ポテンシャルの二乗が単井戸型となる場合に実固有値を持ち、その固有値の漸近分布を、完全 WKB 解の特異点周りにおける接続問題に帰着させて導出する。特に、ポテンシャルの二乗が単井戸型となるには、ふたつの形状が考えられ、ポテンシャルの形状に応じて解の特異性が変化することから、固有値の漸近分布の表現が異なってくる。さらに、ポテンシャルにある特別な対称性を提起することによって、十分に小さな非自己共役摂動に対しては、固有値が実のままであるということ、固有値の漸近分布の表現が、小さな摂動に対しては不変であるという事実と、スペクトルの対称性の議論によって証明する。

第4章では、非自己共役な Zakharov-Shabat 作用素について、単井戸型と二重井戸型のふたつのポテンシャルを扱い、そのときの固有値の漸近分布を考える。特に、単井戸型ポテンシャルの場合については、十分に小さな準古典パラメータに対して、その固有値がすべて純虚数であることを証明する。また、対称な二重井戸型ポテンシャルの場合については、固有値の分離

について解析する。ポテンシャルが偶関数ならば、固有値がふたつの純虚数固有値へと分離し、奇関数ならば、非純虚数固有値へと分離することが、固有値の漸近分布により示される。