

博士論文要旨

論文題名：双曲ブラウン運動に基づく確率解析の 応用

立命館大学大学院理工学研究科
基礎理工学専攻博士課程後期課程
イダ ユウキ
井田 有紀

この博士論文は以下の4つの章から構成されている。

2章では、“Parisian walk”という複素平面上的対称ランダムウォークを導入し、それに基づく離散版の確率解析の枠組みを構成している。このParisian walkは、複素平面上的対称ランダムウォークの中で、複素ブラウン運動の離散類似と思える性質を多く有している。

この性質により、等角性などの複素解析の概念の離散版が定義される。後半部分では、この離散確率解析の数理ファイナンスへの応用として、確率ボラティリティモデルの一つであるHestonモデルのParisian walkによる近似公式を与えている。

3章では、drift係数のついた双曲ブラウン運動の遷移確率密度関数の展開公式を求めている。これはた別の確率ボラティリティモデルであるSABRモデルの下で、オプションのヘッジやプライシングに用いることができる。また、通常の熱核展開式とは異なり、絶対収束する級数による表現となっているため、Bally-Kohatsuの完全シミュレーションの枠組みが適用可能で、SABRモデルの双曲ブラウン運動による完全シミュレーションとしての意味を持つ。さらに、Bally-Kohatsu法でいつでも問題となる分散が発散するという点は、双曲ブラウン運動を使うことによって解消されている。

4章では、ユークリッド空間におけるImamura-Ishigaki-Okumuraの拡散過程の対称化の手法を双曲空間に拡張し、確率ボラティリティモデルの下でのバリアオプションのプライシングに応用するという研究について述べている。Imamura-Ishigaki-Okumura法では確率微分方程式のdrift係数の対称化によって係数が不連続になるという問題があり、数値計算の精度はかならずしも保証されない。上半平面の双曲距離による測地線に関するの折り返しについても同様の問題が起りうるが、ここでは数値実験によって妥当性を検証している。

5章では、非整数型ブラウン運動を指数に乘せ時間平均をとった確率過程が、凸の順序で増大している可積分な確率過程になっているということが証明されている。これは一次元分布が等しくなるようなマルチンゲールが存在することによって示される。さらに時空

調和関数に非整数型ブラウン運動を代入したものの時間平均の凸順序増大性を含むいくつかの拡張とラフボラティリティ下での VIX オプションの価格づけなどの計量ファイナンスの問題への応用の可能性が議論されている。

Abstract of Doctoral Thesis

Title: Applications of Stochastic Calculus based on Hyperbolic Brownian Motion

Doctoral Program in Advanced Mathematics and Physics
Graduate School of Science and Engineering
Ritsumeikan University
イダ ユウキ
IDA Yuuki

The present thesis consists of four parts.

In Chapter 2, we introduce a framework of a discrete stochastic calculus based on Parisian walk, a special kind of symmetric random walk in the complex plane, listing some results analogue to those for complex Brownian motion. This analogy also suggests some discrete analogue of the notions in complex analysis including conformality. We also discuss, as an application to mathematical finance, a Parisian-walk analogue of Heston's stochastic volatility model.

In Chapter 3, an expansion of the transition density of Hyperbolic Brownian motion with drift is given, which is potentially useful for pricing and hedging of options under stochastic volatility models of SABR type. Since the expansion is convergent, which is normally hard to prove, we can apply Bally-Kohatsu's exact simulation interpretation. The simulated random variable implied by our expansion has finite moment of any order, unlike the general situation where the variance explodes.

In Chapter 4, in view of application to pricing of Barrier options under a stochastic volatility model, we study a reflection principle for the hyperbolic Brownian motion, and introduce a hyperbolic version of Imamura-Ishigaki-Okumura's (IIO) symmetrization. Some results of numerical experiments, which imply the efficiency of the numerical scheme based on our hyperbolic version of IIO-symmetrization, in spite of the discontinuity caused by the symmetrization of the drift coefficient, are given.

In Chapter 5, we prove that the time-average of exponential of a fractional Brownian motion is a PCOC, continuous process increasing in the convex order by finding a martingale that has the same one-dimensional distribution. Some extensions including PCOC property of space-time harmonic functional of a fractional Brownian motion and some potential applications to quantitative finance, especially pricing of VIX options under rough volatility are discussed.