

# 多次元 $\alpha$ 対称安定過程に導かれる非リプシッツ係数の確率微分方程式に関する一意性と確率的流れ

土屋 貴裕

本論文は多次元 $\alpha$ 対称安定過程に導かれる確率微分方程式（以下、 $\alpha$ -SDEとよぶ）の解に関する基礎的で重要な性質、即ち、一意性条件、解の非合流条件、解の初期値に関する連続性及び解の作る確率的流れを係数の連続性を出来る限り緩和した条件下で解明することを目的とする。論文は第I部と第II部から構成される。

第I部では一意性条件が研究される。最初にブラウン運動に導かれる確率微分方程式（伊藤過程）の非リプシッツ一意性諸条件がレビューされ方程式の次元 $d$ が $d=1$ 、 $d=2$ 、 $d\geq 3$ の各場合で一意性条件が本質的に異なっていることが注意される。さて、 $\alpha$ -SDEの場合 $d=1$ の場合には小松孝によって非リプシッツ一意性条件が得られていて(1982年)最近R.F.Bassのグループがこの条件に注目し研究を進めている。本論文では $d\geq 2$ の場合にある意味で最良の一意性条件を提出し、その条件から係数が外れる場合には解の一意性が破れることを、反例を挙げて示している。伊藤方程式の場合との差、即ち $d=2$ と $d\geq 3$ の場合に一意性条件が異なるか否か、がブラウン運動に対応するニュートン・ポテンシャルと $\alpha$ 対称安定過程に対応するリース・ポテンシャルの性質の差に原因することが明快に説明されている。

第II部では、先ず解の非合流のための条件が議論され、 $d\geq 2$ の場合の一意性条件がすべての次元での非合流を保障する条件であることが示されている。解の初期値に関する連続性は上の一意性条件に少し修正を加えた条件で保障される。この結果は伊藤過程の場合に初期値に関する連続性を示したFang-Zhanの結果(2005年)に対応するものである。

最後に確率流れを論じる。この問題は係数がリプシッツの場合や極めて滑らかな場合には多くの深い研究があるが、ここでは非リプシッツの場合にこれまでに本論文で得た結果を総動員して更にジョルダンの曲線定理を用いて確率流れを構成する。

本論文ではフーリエ解析とそれに密接に関連するリース・ポテンシャル作用素、ベッセル関数及び超幾何関数が解析的手段として活躍する。方程式の係数行列は対角行列に限られているが、これは特殊関数を自由に駆使してフーリエ解析を行なうために、現時点では止むを得ない制限である。しかし擬微分作用素等の手段で将来結果を一般化する際の足場を提供したと言えよう。