

博士論文要旨

論文題目: E 弦理論におけるサイバーグ-ウィッテン幾何学と ネクラソフ型分配関数

立命館大学大学院理工学研究科
基礎理工学専攻博士課程後期課程
いしい たけのり
石井 健准

M 理論は物質のより基本的な構造を理解しようとする試みとしての最有力候補である超弦理論をも統一すると考えられている。M 理論を理解する手段の 1 つとしてその基本構成要素の 1 つである M5 ブレーン上の理論を理解することがある。しかしながら M5 ブレーン上に実現される 6 次元超対称理論はいまのところラグランジアンによる記述を持たない。一方で、4 次元 $N=2$ 超対称理論はサイバーグ-ウィッテン理論とネクラソフ分配関数による記述を持ち、最も理解された理論と言える。そこで 6 次元超対称理論を dimensional reduction することでその 4 次元 $N=2$ 超対称理論を調べる。

E 弦理論はそのような 6 次元超対称理論の中で最も簡単な理論として知られる。すなわち最小の超対称性と場から構成される。最小の超対称性のため E 弦理論から 4 次元 $N=2$ 超対称理論を得るためにはトーラスコンパクト化のみが許される。このようにして得られた 4 次元 $N=2$ 超対称理論は通常知られる 4 次元 $N=2$ 超対称理論とは多くの性質を異にするが、サイバーグ-ウィッテン理論を用いた解析を行うことができる。4 次元 $N=2$ 超対称理論の歴史に従えば、E 弦理論に対してネクラソフ分配関数公式による解析を期待することは自然である。そのような期待によって 2012 年に E 弦理論におけるネクラソフ型分配関数が与えられた。種数展開に対して各オーダーで直接結果を確かめる方法と、モジュラーアノマリー方程式を用いた方法によってネクラソフ型分配関数は確からしいことが示された。共同研究者と私は先行研究であるネクラソフ分配関数の証明に従ってネクラソフ型分配関数の証明を与えた。我々が示したことは熱力学極限におけるサイバーグ-ウィッテン理論による記述の再現である。行列模型との類似性から分配関数を特徴付けるプロフィール関数はレゾルベントによって再現される。E 弦理論の場合、トーラスコンパクト化によってレゾルベントはある楕円関数によって与えられる。我々はこの楕円関数から知られているサイバーグ-ウィッテン理論による記述を正しく再現することができることを一般的に示した。また、理

論の詳細な設定に応じてこの楕円関数を具体的に与えると、その設定に応じた先行研究の結果に一致することも確認した。続く単独研究ではこの結果をより一般的な条件下においても有効であることを示した。また本研究によってサイバーク-ウィッテン曲線の質量依存性が明確に示された。

Abstract of Doctoral Dissertation

Title: Seiberg-Witten Geometry and
the Nekrasov-type Partition Function
in E-string Theory

Doctoral Program in Advanced Mathematics and Physics
Graduate School of Science and Engineering

Ritsumeikan University

いしい たけのり

ISHII Takenori

Superstrings are the most reliable models as an attempt to understand the fundamental structure of an object. M-theory is the unified theory which contains superstrings. An attempt to understand M-theory is to understand the theory on an M5-brane which is one of the ingredients. However, the six-dimensional theory realised on the M5-brane does not have its Lagrangian description at present. On the one hand, four-dimensional $N=2$ theories have two major descriptions: the Seiberg-Witten theory and the Nekrasov partition function. In this sense, they are the most understood theories. Therefore, by performing the dimensional reduction of the six-dimensional theory to the four-dimensional $N=2$ theory, we can study the six-dimensional theory.

E-string theory is the simplest, six-dimensional theory. However, the least supersymmetry allows only the toroidal compactification to obtain its four-dimensional $N=2$ theory. This theory is also allowed to analyse by using the Seiberg-Witten theory. Thus, historically, we next expect that we can use the Nekrasov partition function also in E-string theory. Such a Nekrasov-type partition function was given in 2012. It was shown that this is almost correct by using the method of the genus expansion and the method of the modular anomaly equation.

The co-author and I gave the proof by following the preceding study. Namely, the essential point of our discussion is the reproduction of the Seiberg-Witten description in the thermodynamic limit. By the analogy with matrix model, the profile function which characterise the partition function is recovered by the resolvent. In E-string theory, due to the toroidal compactification, the resolvent is given by an elliptic function. We generically showed that the Seiberg-Witten description of E-string theory can be reproduced by the elliptic function. In the subsequent study, I extended this result to more general cases. Moreover, the dependence of the Seiberg-Witten curve on the masses is explicitly shown.