論文の内容の要旨及び論文審査の結果の要旨の公表

学位規則第 8 条に基づき、論文の内容の要旨及び論文審査の結果の要旨を公表する。

○氏名	吉永　崇志（よしなが　たかし）
○学位の種類	博士（理学）
○授与番号	乙　第 490 号
○授与年月日	2010 年 9 月 17 日
○学位授与の要件	本学学位規程第 18 条第 2 項 学位規則第 4 条第 2 項
○学位論文の題名	**On the Solutions of Quadratic Diophantine Equations** （二次ディオファントス方程式の解について）
○審査委員	（主査）石井　秀則（立命館大学理工学部教授） 高山　幸秀（立命館大学理工学部教授） 加川　貴章（立命館大学理工学部准教授）

＜論文の内容の要旨＞

（和文）

F を大局体または局所体, $\mathfrak{g}$ を F の整数環とする. F が局所体の場合に $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ の極大イデアルとする. V を F 上の n 次元ベクトル空間とし, φ を V 上の非退化対称 F-双線形形式, $\varphi[x] = \varphi(x, x)$ とおく. L を (φ に関する) V の極大格子, 即ち $\varphi[L] \subset \mathfrak{g}$ を満たす $\mathfrak{g}$-格子の中で 極大であるもの, とする. SO^{φ} を φ の特殊直交群とする. この論文では二次ディオファントス方程式 $\varphi[x] = q$ の L における解の集合 $L[q] = \{x \in L \mid \varphi[x] = q\}$, 及び $L[q, \mathfrak{b}] = \{x \in V \mid \varphi[x] = q, \varphi(x, L) = \mathfrak{b}\}$ について考える. ここで $q \in \mathfrak{g} \cap F^{\times}$, $\mathfrak{b}$ を F の分数イデアルとする.

さて F を局所体し, $C(L) = \{\gamma \in SO^{\varphi} \mid L\gamma = L\}$ とおき, $\varphi[h] \neq 0$ となる $h \in L$ をとる. 私の研究の基盤となる次の二つの事実が志村五郎先生 (プリンストン大学名誉教授) により示されている. 「$L[\varphi[h]] = \bigsqcup_{\alpha \in A} h\alpha C(L)$ を満たす SO^{φ} の有限集合 A が存在する.」, 「$n > 2$ のとき $\#\{L[q, \mathfrak{b}]/C(L)\} \leq 1$.」

この研究の最初の目的は $L[\varphi[h]]/C(L)$ の完全代表系 $\{h\alpha\}_{\alpha \in A}$ を具体的に構成することである. 同時に

$$L[\varphi[h]] = \begin{cases} L[\varphi[h], 2^{-1}\mathfrak{p}^{\tau(\varphi[h])}] & (\varphi \text{ が非等方的であるとき}), \\ \bigsqcup_{i=0}^{\tau(\varphi[h])} L[\varphi[h], 2^{-1}\mathfrak{p}^{i}] & (\varphi \text{ が等方的であるとき}) \end{cases}$$

となることも示し, 値 $\tau(\varphi[h])$ もまた決定する.

二つ目の目的は最初の結果を用いて次の定理を示すことである: $n \geq 2$ のとき, $\varphi[h] \neq 0$ となる $h \in L$ に対して

$$L \cap (Fh)^{\perp} \text{ が } (Fh)^{\perp} \text{ において極大である.} \iff h \in L[\varphi[h], 2^{-1}\mathfrak{p}^{\tau(\varphi[h])}].$$

ここで $(Fh)^{\perp} = \{x \in V \mid \varphi(x, h) = 0\}$ とする. 以下 $W = (Fh)^{\perp}$ とおく. 我々はまた大局体上の場合にも W の格子 $L \cap W$ の極大性について同様の定理を得る. この定理は志村先生の御著書「二次形式とクリフォード群の算術及び解析的理論」(英題の和訳) の (11.6a) において挙げられている問題「如何なる条件のもとに $L \cap W$ は W において極大格子であるか」(英文の和訳) に対して一つの解答を与えるものである.

最初の結果のもう一つの応用として, $V = \mathbf{Q}_n^1$ ($4 \leq n \leq 10$, n は偶数), φ として二乗和, q を二乗因子を持たない正整数ととったときに, $L[q, \mathbf{Z}]$ と $L[q, 2^{-1}\mathbf{Z}]$ の各々に含まれるの解の存在についての基準を与える.

（English）

Let F be a global or local field. We let $\mathfrak{g}$ denote the ring of all integers in F. We denote by $\mathfrak{p}$ the maximal ideal of $\mathfrak{g}$ in the local case. We denote by V an n-dimensional vector space over F. Let φ be a nondegenerate symmetric F-bilinear form. We denote by $\varphi[x]$ the quadratic form $\varphi(x,x)$ on V. By a maximal lattice L in V (with respect to φ), we understand a $\mathfrak{g}$-lattice L in V, which is maximal among $\mathfrak{g}$-lattices on which the values $\varphi[x]$ are contained in $\mathfrak{g}$. Let SO^{φ} be the special orthgonal group of φ. In this paper we consider the set of the solutions of the quadratic Diophantine equation $\varphi[x] = q$ in L, that is $L[q] = \{x \in L \mid \varphi[x] = q\}$, and $L[q, \mathfrak{b}] = \{x \in V \mid \varphi[x] = q, \varphi(x, L) = \mathfrak{b}\}$, where $q \in \mathfrak{g} \cap F^{\times}$ and a fractional ideal $\mathfrak{b}$ of F.

Assume now that F is local, put $C(L) = \{\gamma \in SO^{\varphi} \mid L\gamma = L\}$, and take $h \in L$ such that $\varphi[h] \neq 0$. It was shown by Goro Shimura (Princeton University, Professor Emeritus) that there exists a finite subset A of SO^{φ} such that $L[\varphi[h]] = \bigsqcup_{\alpha\in A} h\alpha C(L)$ and $\#\{L[q,\mathfrak{b}]/C(L)\} \leq 1$ if $n > 2$. Our study is based on these facts.

The first aim of this study is to construct a complete set $\{h\alpha\}_{\alpha\in A}$ of representatives for $L[\varphi[h]]/C(L)$. At the same time, we can show that

$$L[\varphi[h]] = \begin{cases} L[\varphi[h], 2^{-1}\mathfrak{p}^{\tau(\varphi[h])}] & \text{if } \varphi \text{ is anisotropic,} \\ \bigsqcup_{i=0}^{\tau(\varphi[h])} L[\varphi[h], 2^{-1}\mathfrak{p}^{i}] & \text{if } \varphi \text{ is isotropic} \end{cases}$$

with the value $\tau(\varphi[h])$ in Theorem 3.5.

The next aim of the paper is to show Theorem 5.3: When $n \geq 2$,

$$L \cap (Fh)^{\perp} \text{ is maximal in } (Fh)^{\perp} \text{ if and only if } h \in L[\varphi[h], 2^{-1}\mathfrak{p}^{\tau(\varphi[h])}]$$

for $h \in L$ such that $\varphi[h] \neq 0$. Here $(Fh)^{\perp} = \{x \in V \mid \varphi(x,h) = 0\}$. Hereafter we simply put $W = (Fh)^{\perp}$. We also obtain the global version of the maximality of the lattice $L \cap W$ in W, which answers the question raised in (11.6a) in Shimura's book "Arithmetic and Analytic Theories of Quadratic Forms and Clifford Groups".

As a global application of the first result, we give the criterion of the existence of solutions contained in $L[q, \mathbf{Z}]$ and $L[q, 2^{-1}\mathbf{Z}]$ in both cases when q is a squarefree positive integer, by taking $V = \mathbf{Q}_n^1$ ($4 \leq n \leq 10$, n even), the sums of squares as φ.

＜論文審査の結果の要旨＞

本申請論文は次の３つの点において、極めて独創的であり、学問的価値が高い結果を得ていると判断した。

１）Ｆが局所体の場合、志村五郎氏が解の集合 L[q]/C(L)の完全代表系の有限性を証明したが、本論文はそれを精緻化し、Witt 分解を用いて、具体的に完全代表系を構成した。
２）１つの解 h の直交補空間Wに極大ラティスＬを制限した場合の極大性、すなわち、W∩Ｌが極大であるかどうかの判定条件を与えた。この結果は、１）の代表系の構成が十分に具体的であることを意味している。

３） Fが代数体の場合の応用として、φに対応する対称行列が次数 n の単位行列（4≦n≦10）の場合であるが、この場合に解の集合 L[q,Z]を完全に記述している。
この問題は 200 年以上も前から多くの数学者が関心を持って研究を行ってきたテーマである。いくつかの場合に結果が得られているが、本申請はそれらの成果をさらに発展させる成果を得た。

　これらの成果は、この分野の大きな進展に繋がる優れたものである。

本論文の審査に関して、2010 年 7 月 30 日（金）16 時 30 分～17 時 30 分数学第一研究室において公聴会を開催し、申請者による論文要旨の説明の後、審査委員は学位申請者吉永崇志氏に対する口頭試問を行った。各審査委員および公聴会参加者より、定理の条件の必要性や C(L)で割ることの意義、代表系構成の際に、志村五郎氏の定理の証明方法がどのように役に立ったか、などの質問がなされたが、いずれの質問に対しても申請者の回答は適切なものであった。よって、以上の論文審査と公聴会での口頭試問結果を踏まえ、本論文は博士の学位に値する論文であると判断した。